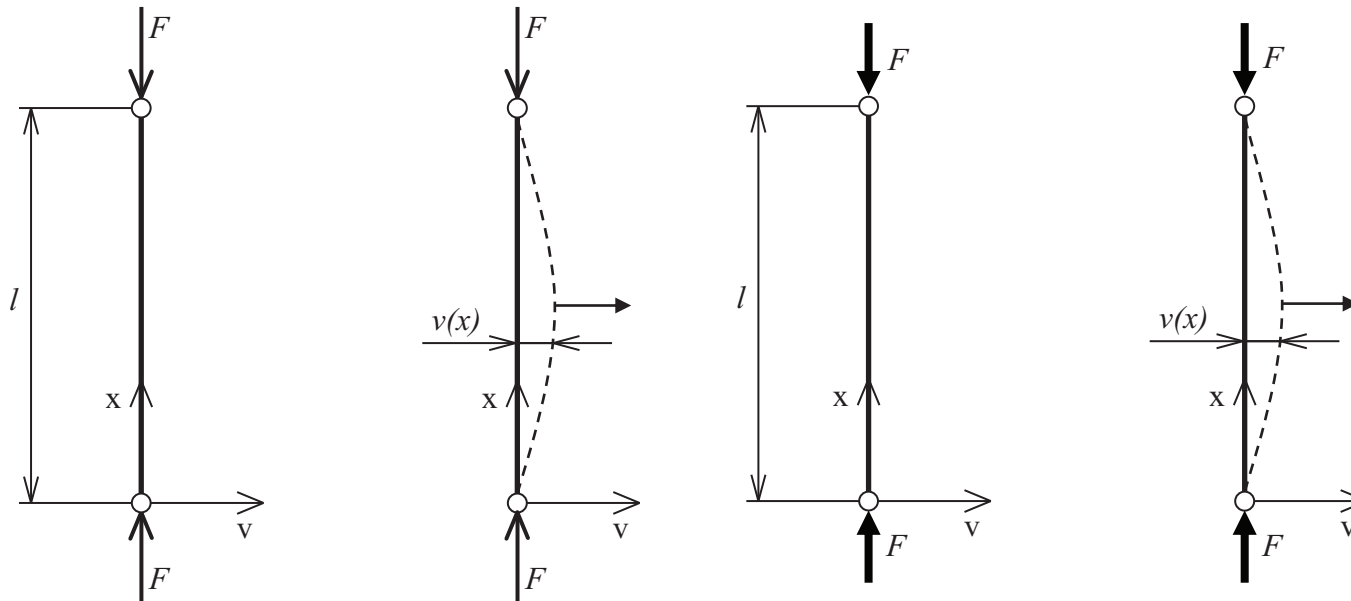


# Kapitola 1

## Stabilita přímých prutů

### 1.1 Úvod

Předpokládejme, že tvar stlačovaného přímého prizmatického prutu je ideální. To znamená, že předpokládáme jeho přímý tvar, výsledná síla působí v jeho podélné ose a materiál je homogenní. Oba konce jsou uloženy kloubově a třecí síly v uložení neuvažujeme. Chování prutu bude závislé na poměru jeho délky  $l$  a geometrických charakteristik průřezu (obr. 1.1). U krátkého prutu budou vnitřní síly, reprezentované normálovým tlakovým napětím, s rostoucí silou  $F$  narůstat. Osa prutu zůstane přímá v celém procesu zatěžování, prut se nachází ve stabilní rovnováze mezi vnitřními a vnějšími silami.

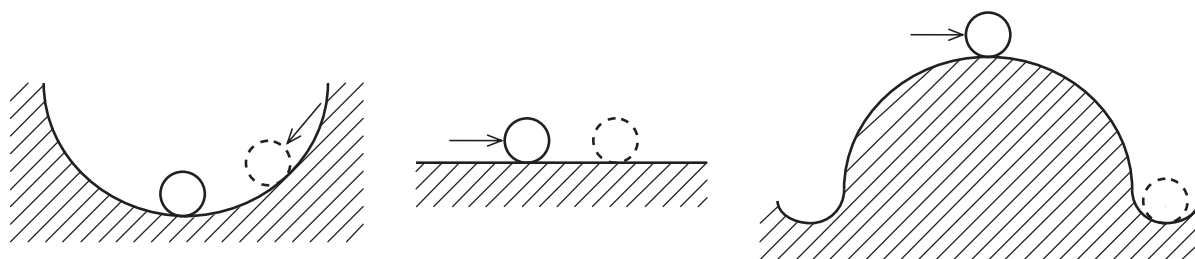


Obrázek 1.1:

Štíhlý prut je na počátku zatěžování rovněž ve stavu stabilní rovnováhy. Přesvědčíme se o tom tak, že přímý prut mírně vybočíme příčnou silou (obr. 1.1 vpravo) a uvolníme. Prut se vrátí do přímé polohy a obnoví se stabilní rovnováha vnitřních a vnějších sil. Při dalším zvyšování síly  $F$  na určitou velikost prut tuto vlastnost ztratí.

Po vybočení osy prutu se prut při této velikosti síly  $F$  do stabilní polohy nevrátí a zůstane v prohnutém stavu, který mu byl udělen. Tento stav rovnováhy označujeme jako **indiferentní**. Síla  $F$  dosáhla **kritické** hodnoty. Prut je nyní při vybočení namáhán kromě tlaku také ohybem. Dalším i nepatrným zvýšením kritické síly  $F_{kr}$  nebo narůstáním průhybu nastane zhroucení prutu. Rovnováha je **labilní (nestabilní)**.

Analogii k uvedené definici stabilní, indiferentní a nestabilní rovnováhy uvedeme z mechaniky tuhých těles (obr. 1.2). Těleso – kulička je ve stabilní rovnováze jestliže se po vychýlení vrátí zpět do výchozí polohy (obr. 1.2 vlevo). Na obr. 1.2 vpravo je naznačen labilní stav rovnováhy. Sebemensi impuls způsobí samovolný pohyb tělesa, který se zastaví až při zaujmutí zcela jiné rovnovážné polohy. Stav mezi stabilní a labilní rovnováhou je znázorněn na obr. 1.2 uprostřed. Přejchod mezi oběma stavy je tvořen indiferentní rovnováhou. Kulička zůstává v libovolné vychýlené poloze. Rozhodující



Obrázek 1.2: Stabilní rovnováha (vlevo), indiferentní rovnováha (uprostřed) a labilní rovnováha (vpravo).

pro posouzení stability štíhlých prutů je stanovení kritické síly  $F_{kr}$ . Vzpěry používané v praxi mají od ideálního geometrického tvaru odchylky vznikající podle použité technologie v průběhu výroby a při aplikaci výrobku. Mohou se vyskytovat i materiálové nehomogenity. Zde budeme kritickou sílu určovat na prutech ideálního tvaru a vliv různých odchylek a dalších vlivů zahrneme do součinitele bezpečnosti.

Při sestavování rovnic rovnováhy jsme v předchozích kapitolách zanedbávali změny tvaru těles, které vznikaly v důsledku působení vnějších sil. Postupovali jsme podle teorie 1. řádu, podle které lze, vzhledem k zanedbatelné velikosti deformací vůči rozměrům vyšetřovaných těles, sestavovat rovnice rovnováhy na nedeformovaném tělese.

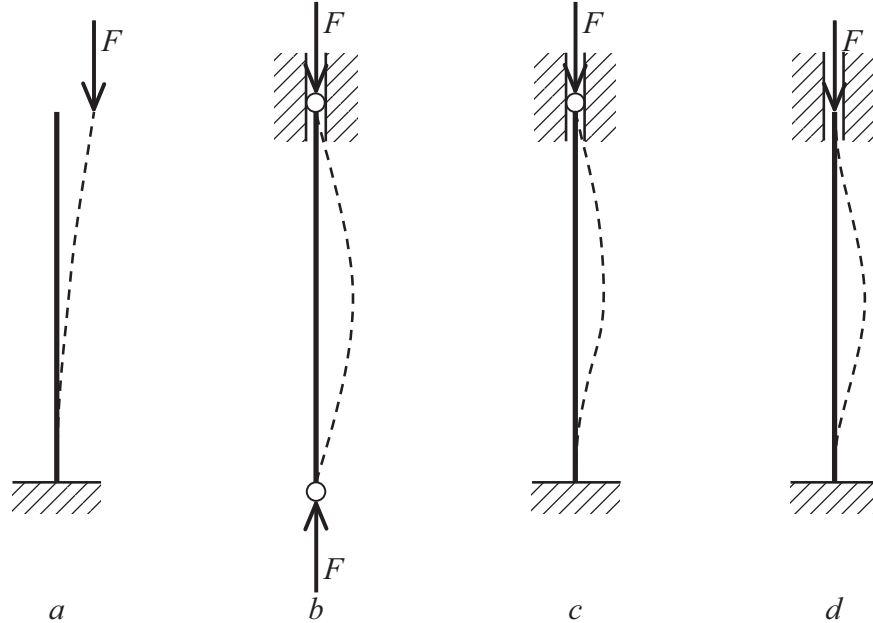
Indiferentnímu stavu rovnováhy stlačovaného prutu kritickou silou  $F_{kr}$  odpovídá prohnutý stav, vyvolaný příčnou silou. Po odstranění příčné síly zůstane prut v prohnutém stavu (obr. 1.1 vlevo) jen za působení ohybového momentu

$$M_{Oz}(x) = F_{kr} v(x). \quad (1.1)$$

Při vyšetřování stability přímých prutů musíme tudíž vycházet z přetvořené střednice podle teorie 2. řádu. Velikost kritické síly  $F_{kr}$  je závislá na tuhosti stlačovaného prutu. To znamená na rozměrech, materiálu, ale také na uložení jeho konců. Podle uložení konců prutu se rozlišují čtyři základní případy stability – vzpěru přímých prutů (obr. 1.3).

V technické praxi lze obvykle sledované případy zařadit do jednoho ze čtyř základních případů a stanovit minimální velikost kritické síly. Na obrázku 1.3a je uveden první případ vzpěru. Na jednom konci je vzpěra vetknuta a druhý konec je volný. V druhém případě vzpěru (obr. 1.3b) jsou oba konce uloženy kloubově s možností osového

posuvu. V třetím případě (obr. 1.3c) je jeden konec vzpěry vetknutý, druhý konec je uložený kloubově s možností osového posuvu. Ve čtvrtém případě jsou oba konce prutu (obr. 1.3d) vetknuté s možností osového posuvu jednoho konce stlačovaného prutu. Vetknutí předpokládáme nepoddajná.



Obrázek 1.3:

## 1.2 Eulerova kritická síla

### 1.2.1 První případ vzpěru

Při výpočtu kritické síly  $F_{kr}$  vycházíme z indiferentního stavu rovnováhy. Při působení této síly může být prut vychýlen (obr. 1.4). Velikost průhybu  $v(x)$  je v mezích Hookeova zákona libovolná, tj.  $c$  je libovolné vychýlení konce prutu.

V obecném řezu  $\xi$  je průhyb  $v(x)$ . Ohybový moment v témže řezu

$$M_o(x) = -F_{kr} (c - v(x)) . \quad (1.2)$$

Diferenciální rovnice průhybové čáry, za předpokladu malých výchylek má tvar

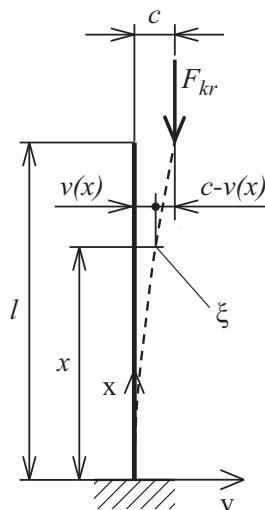
$$v''(x) = \frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M_o(x)}{EJ_z} = +\frac{F_{kr}}{EJ_z} (c - v(x)) . \quad (1.3)$$

Zavedeme

$$\frac{F_{kr}}{EJ_z} = \alpha^2 . \quad (1.4)$$

Po úpravě má rovnice (1.3) tvar

$$v''(x) + \alpha^2 v(x) = \alpha^2 c . \quad (1.5)$$



Obrázek 1.4:

Rov. (1.5) je nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními činiteli. Její partikulární integrál je zřejmě

$$v_p = c$$

a obecný integrál nehomogenní rovnice má tvar

$$v(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + c, \quad (1.6)$$

kde  $A$  a  $B$  jsou integrační konstanty.

Ve vetknutí pro  $x = 0$  je  $v(0) = 0$ . Pak integrační konstanta

$$B = -c.$$

Ve vetknutí je současně okrajová podmínka

$$v'(0) = 0, \quad (1.7)$$

pomocí které stanovíme druhou integrační konstantu

$$A = 0.$$

Po dosazení konstant  $A$  a  $B$  do rov. (1.6) obdržíme rovnici průhybové čáry vzpěry s jedním vetknutým koncem ve tvaru

$$v(x) = c(1 - \cos \alpha x) = c\eta(x), \quad (1.8)$$

kde  $c$  je vlastně libovolná amplituda křivky  $\eta(x) = (1 - \cos \alpha x)$ . Pro koncový bod vzpěry je průhyb

$$v(l) = c = c(1 - \cos \alpha l),$$

odkud stanovíme

$$c \cos \alpha l = 0. \quad (1.9)$$

Pro splnění rovnice mohou nastat dva případy:

- a) buď je  $c = 0$  prut je přímý a vzpěrná síla  $F < F_{kr}$ , rovnováha je stabilní;  
 b) nebo  $\cos \alpha l = 0$  což znamená, že je možná libovolná výchylka  $c$  v mezích Hookeova zákona – jedná se o indiferentní rovnováhu a síla  $F = F_{kr}$  a pro argument  $\alpha l$  plyne

$$\alpha l = k \frac{\pi}{2}, \quad (1.10)$$

kde  $k = 1, 3, 5 \dots$

Pomocí rovnice (1.4) určíme kritickou sílu

$$F_{kr} = \alpha^2 E J_z = \frac{k^2}{l^2} \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 E J_z. \quad (1.11)$$

Minimální velikost kritické síly pro první případ vzpěru určíme pro  $k = 1$  ze vztahu

$$F_{kr}^I = \frac{\pi^2 E J_z \min}{4 l^2}. \quad (1.12)$$

K případnému prohnutí prutu dochází kolem osy, ke které je kvadratický moment průřezu  $J$  minimální. V předchozích vztazích jsme předpokládali, že  $J_{\min} = J_z$ .

Znovu je vhodné připomenout, že v rov. (1.3) jsme předpokládali platnost Hookeova zákona, tudíž vztah pro kritickou sílu (1.12) lze použít pouze v případě, že kritické napětí nepřestoupí mez úměrnosti materiálu vzpěry

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}^I}{A} \leq \sigma_u. \quad (1.13)$$

Problémy stability přímých prutů řešil **Leonard Euler**. Proto se kritická síla  $F_{kr}$  často označuje a nazývá jako Eulerova –  $F_\epsilon$ .

Tvary průhybové čáry vzpěry 1. případu, odpovídající indiferentní rovnováze pro  $k = 1, 3, 5 \dots$  jsou uvedeny na obrázcích 1.5 Tyto další tvary jsou labilní a proto vyžadují k dosažení vyšších hodnot kritické síly boční podporu.

### 1.2.2 Druhý případ vzpěru

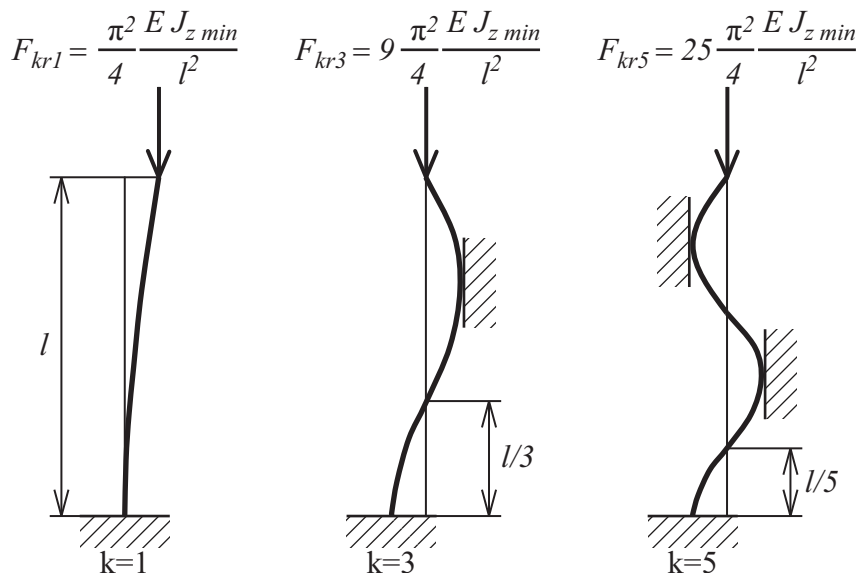
Dokonale přímý prizmatický prut, zatížený osovou silou působící v těžišti průřezu je uložen oběma konci kloubově s možným osovým posuvem jednoho kloubu (obr. 1.6).

V indiferentním stavu rovnováhy prutu je možný průhyb s deformacemi v mezích Hookeova zákona. V obecném řezu  $\xi$  působí ohybový moment

$$M_o(x) = F_{kr} v(x). \quad (1.14)$$

Diferenciální rovnice průhybové čáry má tvar

$$v''(x) = - \frac{M_o(x)}{E J_z} = - \frac{F_{kr}}{E J_z} v(x). \quad (1.15)$$



Obrázek 1.5:

Po úpravě je

$$v''(x) + \alpha^2 v(x) = 0, \quad (1.16)$$

kde opět

$$\alpha^2 = \frac{F_{kr}}{EJ_z}.$$

Rovnice (1.16) je homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními činiteli. Její integrál je

$$v(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x. \quad (1.17)$$

$A, B$  jsou integrační konstanty, které stanovíme z následujících okrajových podmínek :

1. pro  $x = 0$  z rovnice (1.17) plyne

$$v(0) = 0 = A \quad (1.18)$$

Rovnice průhybové čáry je sinusoida o amplitudě  $B$ .

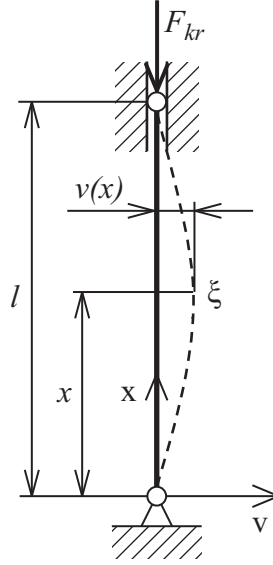
$$v(x) = B \sin \alpha x \quad (1.19)$$

2. pro  $x = l$  z rov. (1.19) obdržíme

$$v(l) = 0 = B \sin \alpha l \quad (1.20)$$

Podmínka (1.20) je splněna jestliže  $B = 0$  nebo  $\sin \alpha l = 0$ . V prvním případě podle rov. (1.19) nevzniká, pro libovolnou sílu, průhyb, což znamená, že se jedná o statickou rovnováhu a síla  $F$  není kritická. V druhém případě je  $\sin \alpha l = 0$ , když

$$\alpha l = k\pi \quad (1.21)$$



Obrázek 1.6:

a

$$k = 1, 2, 3 \dots \quad (1.22)$$

Minimální hodnotu kritické síly druhého případu vzpěru určíme pro  $k = 1$  a  $J_{z \min}$

$$F_{kr}^{II} = \pi^2 \frac{E J_{z \min}}{l^2} . \quad (1.23)$$

Vyšší hodnoty  $k$  poskytují větší kritické síly, ale tvar průhybové čáry v indiferentním stavu rovnováhy

$$v(x) = B \sin \frac{k\pi}{l} x$$

vyžaduje opět boční podporu (obr. 1.7).

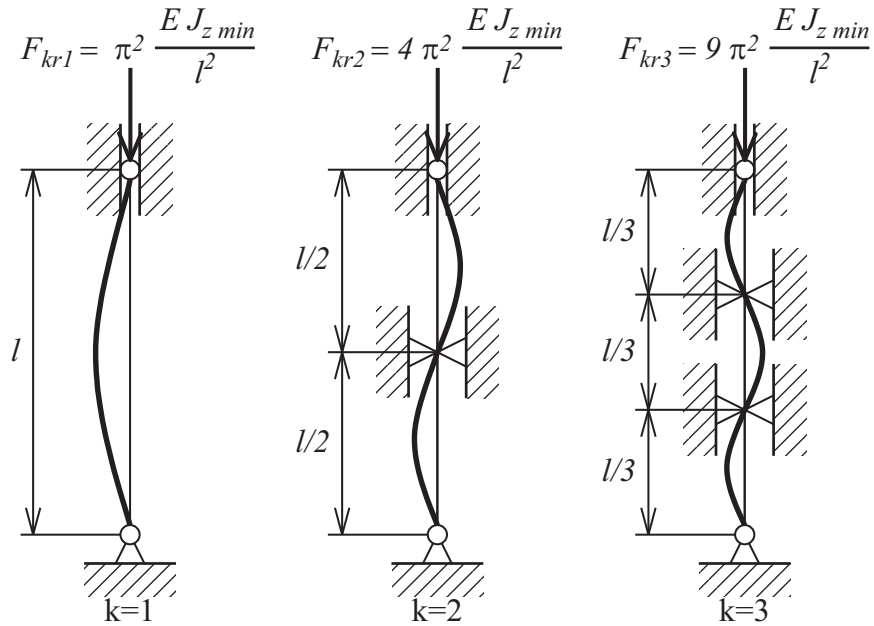
Vybočení vzpěry nastane v rovině nejmenší ohybové tuhosti. Z toho je patrné, že pruty s rozdílnými kvadratickými momenty, např.  $I$  nebo  $U$  profil, jsou pro aplikace jako vzpěry méně vhodné. Optimální jsou pruty s průřezy, kde  $J_1 = J_2$  jako je kruhový průřez, čtvercový průřez nebo trubka. Navrhování vzpěry z více profilů je výhodné sestavit tak, aby rozdíl mezi  $J_{max}$  a  $J_{min}$  byl co nejmenší.

### 1.2.3 Třetí případ vzpěru

Uložení konců vzpěry třetího případu je složitější. Jeden konec je uložen podle prvního případu, druhý podle druhého případu vzpěru (obr. 1.8).

To znamená, že jeden konec je vetknutý a druhý je uložen kloubově s možností posuvu kloubu ve směru přímé osy prutu. Při prohnutí vzpěry, odpovídající indiferentnímu stavu rovnováhy, vzniká v kloubovém uložení při působení osové síly  $F_{kr}$  horizontální síla  $H$ . Ohybový moment od těchto sil v obecném řezu  $\xi$  je roven

$$M_o(x) = F_{kr} v(x) - H (l - x) . \quad (1.24)$$



Obrázek 1.7:

Vzpěra se nachází v indiferentním stavu rovnováhy mezi vnějšími a vnitřními silami a průhyb prutu je v mezích platnosti Hookeova zákona. Diferenciální rovnice průhybové čáry má pak tvar

$$v''(x) = -\frac{M_o(x)}{EJ_z} = -\frac{F_{kr}}{EJ_z} \left[ v(x) - \frac{H}{F_{kr}} (l - x) \right]. \quad (1.25)$$

Opět zavedeme

$$\alpha^2 = \frac{F_{kr}}{EJ_z}, \quad \text{tj.}$$

$$v''(x) + \alpha^2 v(x) = \alpha^2 \frac{H}{F_{kr}} (l - x). \quad (1.26)$$

Integrál diferenciální rovnice (1.26) má tvar

$$v(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x + v_p. \quad (1.27)$$

$A$ ,  $B$  jsou integrační konstanty a  $v_p$  partikulární integrál, který v závislosti na pravé straně rov. (1.26) odhadneme ve tvaru

$$v_p = K (l - x), \quad (1.28)$$

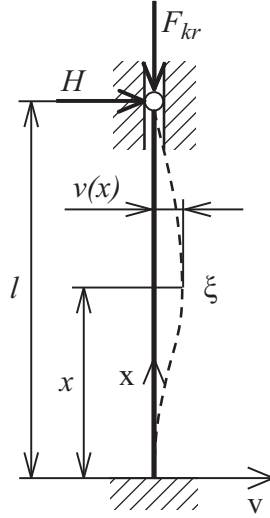
kde  $K$  je konstanta, kterou získáme pro dosazení odhadu partikulárního integrálu (1.28) do rov. (1.26)

$$0 + \alpha^2 K (l - x) = \alpha^2 \frac{H}{F_{kr}} (l - x),$$

odkud

$$K = \frac{H}{F_{kr}} \quad \text{a} \quad v_p = \frac{H}{F_{kr}} (l - x). \quad (1.29)$$





Obrázek 1.8:

Obecné řešení nehomogenní rov. (1.26) je

$$v(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x + \frac{H}{F_{kr}} (l - x) . \quad (1.30)$$

Nyní stanovíme integrační konstanty  $A$ ,  $B$  z okrajové podmínky uložení konce vzpěry:

1. pro  $x = 0$  je  $v(0) = 0$  a

$$A = -\frac{H}{F_{kr}} l$$

2. pro  $x = 0$  je  $v'(0) = 0$  a

$$B = \frac{1}{\alpha} \frac{H}{F_{kr}}$$

Hodnoty integračních konstant dosadíme do řešení (1.30), takže pro průhyb obecného místa osy vzpěru v indiferentním stavu rovnováhy plyne:

$$v(x) = \frac{H}{F_{kr}} \left( \frac{\sin \alpha x}{\alpha} - l \cos \alpha x + l - x \right) . \quad (1.31)$$

Průhyb vzpěry v místě kloubu, tj. v místě  $x = l$  je za všech podmínek nulový:

$$v(l) = 0 = \frac{H}{F_{kr}} \left( \frac{\sin \alpha l}{\alpha} - l \cos \alpha l \right) . \quad (1.32)$$

Z tvaru této rovnice je patrné, že mohou nastat dva odlišné případy. Buď je

$$\frac{H}{F_{kr}} = 0 : \quad (1.33)$$

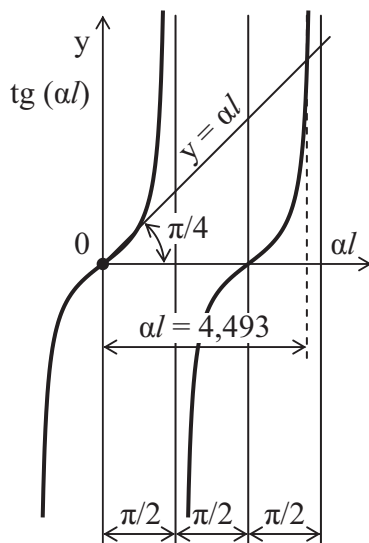
To znamená, že je příčná síla  $H = 0$ , vzpěra není prohnutá - jedná se o stabilní rovnováhu a působící osová tlaková síla  $F < F_{kr}$ . Pokud je síla  $H \neq 0$ , pak podle rov. (1.32) je

$$\frac{\sin \alpha l}{\alpha} - l \cos \alpha l = 0 \quad (1.34)$$

nebo po úpravě

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l. \quad (1.35)$$

Názorný grafický způsob stanovení kořenů této transcendentní rovnice je uveden na



Obrázek 1.9:

obr. 1.9. Rovnici (1.35) vyhovuje kořen  $\alpha l = 0$ , což je nezatížená vzpěra. Další kořen je

$$\alpha l = 4,493, \quad (1.36)$$

tudíž

$$\alpha^2 l^2 = 4,493^2 \approx 20,19 \approx 2\pi^2,$$

odkud nejmenší kritická síla pro třetí případ vzpěru je

$$F_{kr}^{III} \doteq 2\pi^2 \frac{EJ_{z \min}}{l^2} \quad (1.37)$$

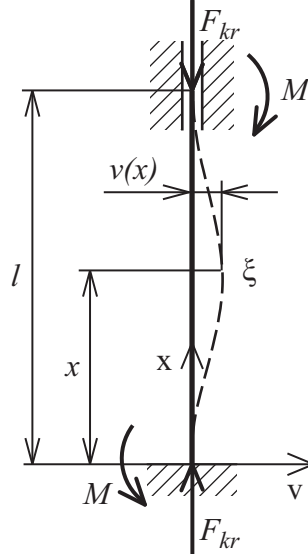
nebo přesněji

$$F_{kr}^{III} \doteq \pi^2 \frac{EJ_{z \min}}{(0,7l)^2}. \quad (1.38)$$

#### 1.2.4 Čtvrtý případ vzpěru

U čtvrtého případu jsou oba konce vzpěry (obr. 1.10) vetknuté, s možností posuvu ve vetknutí jednoho konce ve směru podélné osy. Jako u předešlých případů předpokládáme, že vzpěra je přímá, prizmatická, materiál je homogenní a vetknutí nepoddajné. Je-li vzpěra opět v indiferentním stavu rovnováhy, je možný libovolný stabilní průhyb s výchylkou v mezích platnosti Hookeova zákona. V důsledku průhybu vzpěry působí v každém vetknutí dvojice  $M$ . Výsledný ohybový moment v obecném řezu  $\xi$  je dán vztahem

$$M_o(x) = F_{kr}v(x) - M. \quad (1.39)$$



Obrázek 1.10:

Diferenciální rovnice průhybové čáry má tvar

$$v''(x) = -\frac{M_o(x)}{EJ_z} = \frac{1}{EJ_z} (M - F_{kr}v(x)) .$$

Zavedeme-li opět

$$\alpha^2 = \frac{F_{kr}}{EJ_z} ,$$

má diferenciální rovnice po úpravě tvar

$$v''(x) + \alpha^2 v(x) = \alpha^2 \frac{M}{F_{kr}} . \quad (1.40)$$

Je to nehomogenní lineární rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty. řešení je opět určeno součtem obecného integrálu homogenní rovnice a integrálu partikulárního

$$v(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x + v_p ,$$

kde partikulární integrál je podle tvaru pravé strany diferenciální rovnice (1.40) roven konstantě. Po dosazení  $v_p = \text{konst.}$  do diferenciální rovnice stanovíme

$$v_p = \frac{M}{F_{kr}} .$$

Konečný tvar obecného integrálu nehomogenní rovnice (1.40) je

$$v(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x + \frac{M}{F_{kr}} . \quad (1.41)$$

Integrační konstanty  $A, B$  určíme z počátečních podmínek :

1. pro  $x = 0$  je

$$v(0) = 0 = A + \frac{M}{F_{kr}} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{M}{F_{kr}}$$

2. pro  $x = 0$  je rovněž  $v'(0) = 0 = \alpha B$ . Jelikož  $\alpha = \left(\frac{F_{kr}}{EJ_z}\right)^{1/2} \neq 0$  je

$$B = 0$$

Obecná rovnice průhybu pro dané počáteční podmínky je

$$v(x) = \frac{M}{F_{kr}} (1 - \cos \alpha x) . \quad (1.42)$$

Ve druhém vetknutí vzpěry pro

$$x = l \quad \text{je} \quad v(l) = 0 \Rightarrow 1 - \cos \alpha l = 0, \quad \text{to jest} \quad \cos \alpha l = 1$$

to platí pro všechna

$$\alpha l = k2\pi , \quad (1.43)$$

kde  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Z rov. (1.43) po úpravě stanovíme kritickou sílu

$$\alpha^2 l^2 = k^2 4\pi^2 ; \quad \frac{F_{kr}}{EJ_z} l^2 = k^2 4\pi^2 .$$

Pro nejmenší kritickou sílu volíme  $k = 1$

$$\min F_{kr}^{IV} = 4\pi^2 \frac{EJ_z \min}{l^2} . \quad (1.44)$$

Srovnáme-li výsledné vztahy kritické síly pro uvedené základní případy stability přímých prutů (1.12) (1.23) (1.37) (1.44) je patrné, že je lze vyjádřit vztahem

$$F_{kr}^i = F_\varepsilon = n_i \pi^2 \frac{EJ_{\min}}{l^2} , \quad (1.45)$$

kde  $n_i$  pro jednotlivé případy vzpěru je

$$n_I = \frac{1}{4}; \quad n_{II} = 1; \quad n_{III} = 2; \quad n_{IV} = 4 .$$

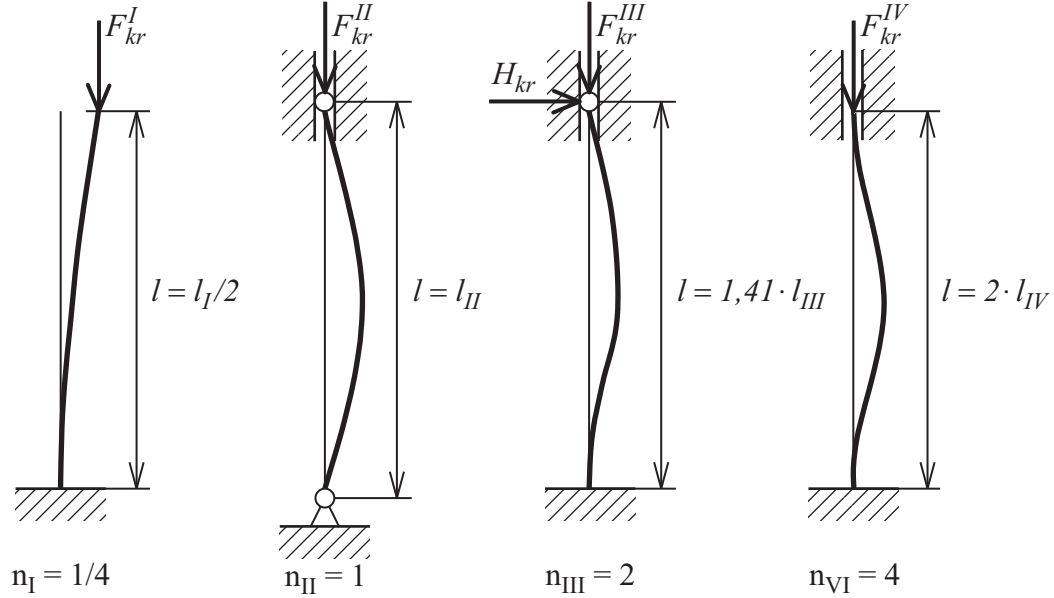
Někdy se k zápisu jednotného vztahu pro kritické (Eulerovy) síly základních případů vzpěru používá také tzv. **srovnávací délka**  $l_i$ . Vychází se z rovnosti

$$F_{kr}^i = \pi^2 \frac{EJ_{\min}}{l_i^2} = n_i \pi^2 \frac{EJ_{\min}}{l^2} , \quad (1.46)$$

odkud pro srovnávací délku plyne vztah

$$l_i = \frac{l}{(n_i)^{1/2}} . \quad (1.47)$$

Závislosti koeficientů  $n_i$  a srovnávacích délek pro základní případy vzpěru jsou uvedeny na obr. 1.11.



Obrázek 1.11:

### 1.3 Podmínka stability ve vzpěru v nelineární oblasti

Kritické síly pro jednotlivé případy vzpěru, odvozené z diferenciální rovnice průhybové čáry (rovnice 1.3), platí pouze v oboru platnosti Hookeova zákona. Při působení kritické síly  $F_{kr}$  na vzpěru je proto maximální napětí rovno mezi úměrnosti

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} \leq \sigma_u, \quad (1.48)$$

kde  $\sigma_{kr}$  je kritické napětí, které se též nazývá Eulerovo napětí a označuje se  $\sigma_\varepsilon$ . S použitím vztahu (1.45) je toto napětí

$$\sigma_{kr} = \sigma_\varepsilon = \frac{F_\varepsilon}{A} = n_i \pi^2 \frac{E J_{min}}{l^2 A}. \quad (1.49)$$

Jelikož poměr

$$\frac{J_{min}}{A} = i_{min}^2, \quad (1.50)$$

je kvadrát minimálního poloměru kvadratického momentu průřezu, lze vztah (1.49) pro kritické Eulerovo napětí vyjádřit následovně

$$\sigma_{kr} = \sigma_\varepsilon = n_i \pi^2 \frac{E}{\left(\frac{l}{i_{min}}\right)^2}. \quad (1.51)$$

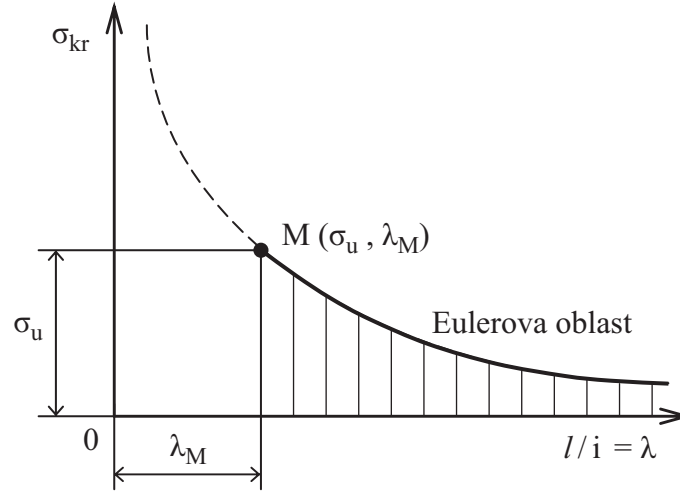
Poměr

$$\frac{l}{i_{min}} = \lambda$$

se nazývá **štíhlostní poměr** nebo krátce **štíhlost** prutu. Graf závislosti kritického napětí na štíhlostním poměru je znázorněn na obr. 1.12. Bod  $M(\sigma_u, \lambda_M)$  je určen

mezní hodnotou kritického napětí  $\max \sigma_{kr} = \sigma_u$  a  $\lambda_M$  je mezní štíhlost vzpěry, v oblasti platnosti Hookeova zákona, stanovená z rov. (1.51)

$$\lambda_M = \pi \left( \frac{n_i E}{\sigma_u} \right)^{1/2}. \quad (1.52)$$



Obrázek 1.12:

Z grafu na obr. 1.12 je patrné, že podmínku omezující platnost Hookeova zákona, danou rovnicí (1.48), lze též vyjádřit pomocí mezní štíhlosti

$$\frac{l}{i} \geq \lambda_M. \quad (1.53)$$

Poznamenejme, že mezní štíhlost  $\lambda_M$  je závislá pouze na materiálových charakteristikách a podmínkách uložení konců vzpěry (rov. 1.52).

Tak např. pro vzpěru s konci uloženými podle 2. případu ( $n = 1$ ) vyrobenou z oceli ( $E = 2,0 \cdot 10^5$  MPa;  $\sigma_u = 2 \cdot 10^2$  MPa) je mezní štíhlostní poměr podle rov. (1.52)

$$\lambda_M = \left( \frac{l}{i} \right)_M = \pi \left( \frac{E}{\sigma_u} \right)^{1/2} \approx 100.$$

Má-li vzpěra např. kruhový průřez o průměru  $d$ , je  $i = d/4$  a pak

$$\left( \frac{l}{i} \right)_M = \left( \frac{4l}{d} \right)_M = 100.$$

Z uvedeného vztahu lze určit mezní délku vzpěry, pro kterou lze ještě použít rovnici pro kritickou Eulerovu sílu (rov. 1.45)

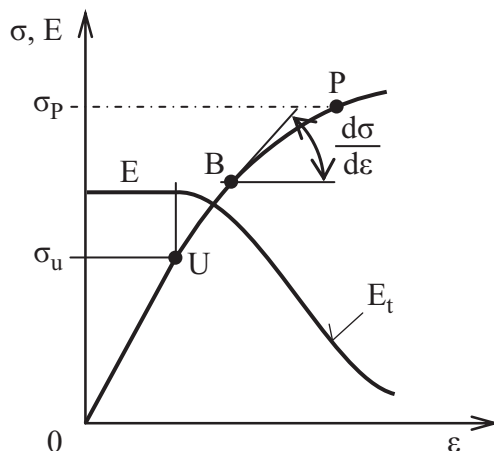
$$l \geq 25d.$$

## 1.4 Výpočet kritické síly v oblasti plastických deformací

Pro dimenzování vzpěry v oblasti, kde vznikají plastické deformace, kde kritické napětí je vyšší než mez úměrnosti, nelze najít jednoznačně platné teoretické řešení, analogické k Eulerovu řešení ve zcela elastické oblasti. Pro nízké hodnoty štíhlosti (obr. 1.12) přechází vzpěr v prostý tlak. Dimenzování je zde založeno na podkladech získaných četnými experimenty, provedenými pro různé tvary průřezů, štíhlostní poměry a materiály. Stanovení kritického napětí v plastické oblasti můžeme v podstatě určit třemi základními postupy.

### 1.4.1 Zavedení redukovaného modulu pružnosti

Snahou tohoto přístupu je rozšíření Eulerových vztahů i za mez úměrnosti zavedením proměnlivého modulu pružnosti pro celý obor štíhlostních poměrů (obr. 1.13). Tzv. „redukovaný modul pružnosti“  $E_{red}$  respektuje nelineární závislost napětí  $\sigma$  na poměrném prodloužení  $\varepsilon$ . Vztah



Obrázek 1.13:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \operatorname{tg} \beta = E_t$$

respektuje okamžitou tuhost materiálu vzpěry.  $E_t$  je tzv. **tečný modul pružnosti** v bodě  $B$  (obr. 1.13). Zavedením tečného modulu  $E_t$  místo Youngova modulu  $E$  do Eulerových vztahů pro kritické napětí se ukázalo vhodné pouze u tenkostěnných průřezů, jinak vznikají příliš hmotné konstrukce. Engesser později odvodil pro vzpěru obdélníkového průřezu **redukovaný modul pružnosti** používaný za předpokladu, že plastické deformace vznikají pouze v části průřezu a na vypuklé straně dochází v důsledku prohnutí k poklesu napětí

$$E_{red} = \frac{4EE_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2}. \quad (1.54)$$

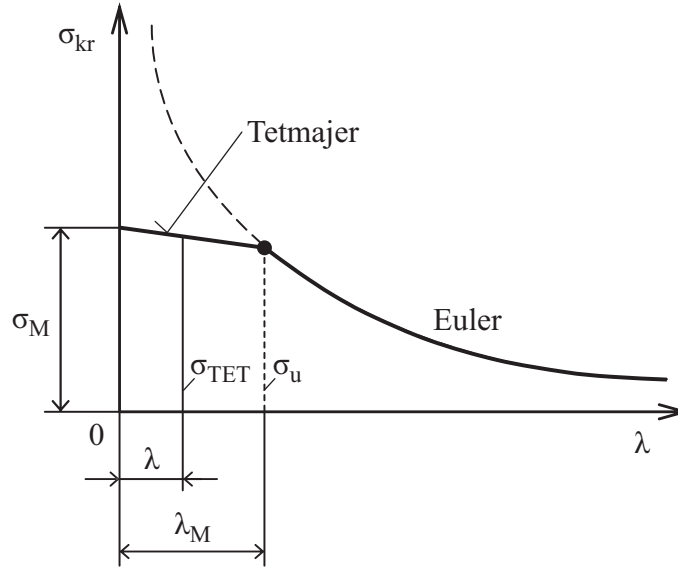
Kritická síla se stanoví z upraveného Eulerova vztahu

$$F_{kr}^i = n_i \pi^2 \frac{E_{red} J_{min}}{l^2}. \quad (1.55)$$

Vztah je možné použít i pro jiné jednoduché plné průřezy zavedením korekčních faktorů.

### 1.4.2 Řešení podle Tetmajera

Někteří autoři nahrazují v pružnoplastickém rozsahu ( $\sigma_{kr} > \sigma_u$ ) mezní křivku stability podle Eulerova (obr. 1.12) body získanými experimentálně. Experimentální křivka má obvykle s Eulerovou polytropou společný bod  $(\lambda_M, \sigma_u)$  nebo společnou tečnu v tomto bodě. V naší praxi se často používá Tetmajerův vztah, který reprezentuje přímkovou závislost v oblasti plastických deformací (obr. 1.14).



Obrázek 1.14:

Kritické napětí pro ocelové vzpěry podle Tetmajera  $\sigma_{TET}$  stanovíme z rovnice mezní přímky (obr. 1.14)

$$\sigma_{kr} = \sigma_{TET} = \sigma_M - (\sigma_M - \sigma_u) \frac{\lambda}{\lambda_M}. \quad (1.56)$$

Pro houževnaté materiály je mezní napětí rovno mezi kluzu v tlaku

$$\sigma_M = \sigma_{kd},$$

t.j.

$$\sigma_{TET} = \sigma_{kd} - (\sigma_{kd} - \sigma_u) \frac{\lambda}{\lambda_M}.$$

Pro křehké materiály je mezní napětí rovno mezi pevností v tlaku

$$\sigma_M = \sigma_{pd}.$$

V odborné literatuře najdeme rovnici (1.56) ve tvaru

$$\sigma_{TET} = a - b\lambda, \quad (1.57)$$

kde  $a$ ,  $b$ , jak je patrné z rov. (1.56), jsou materiálové konstanty. Pro litinu a další křehké materiály má Tetmajerova rovnice parabolickou závislost (obr. 1.15a)

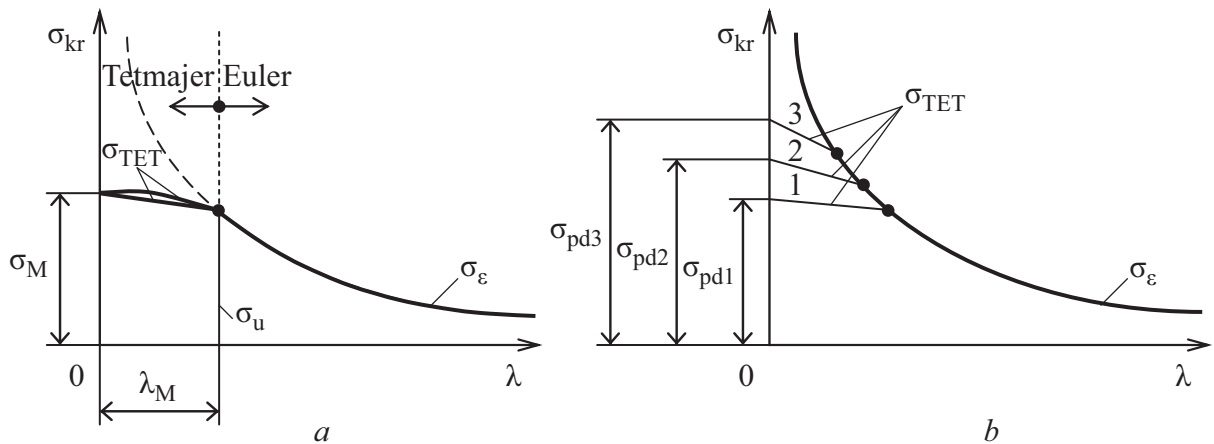
$$\sigma_{TET} = a - b\lambda + c\lambda^2. \quad (1.58)$$



Tak např. pro určitou konstrukční ocel se kritické napětí stanoví podle vztahu (1.52):

$$\sigma_{kr} = \sigma_{TET} = 360 - \frac{360 - 310}{82} \lambda, \quad a = 360; b = 0,61.$$

Kritická síla určená z Eulerova vztahu (1.46) je z hlediska materiálových vlastností závislá pouze na modulu pružnosti  $E$ , který se u oceli i s různou mezí pevnosti prakticky nemění. Na obrázku 1.15b jsou uvedeny tři podmínky určující kritická Tetmajerova napětí ve vzpěrách vyrobených ze tří materiálů o různých mechanických vlastnostech. Z obrázku je patrný vliv zvýšení mechanických vlastností materiálu na stabilitu vzpěry v plastické oblasti.



Obrázek 1.15:

### 1.4.3 Součinitel vzpěrnosti

Při výrobě vzpěr se často používá omezený počet druhů materiálů. V takovém případě lze kritické napětí v elastické i plastické oblasti tabelovat v závislosti na štíhlostním poměru. V tabulce 1.1 je uveden tzv. „součinitel vzpěrnosti“  $c$ , stanovený poměrem

$$c = \frac{\sigma_{mez}}{\sigma_{kr}}, \quad (1.59)$$

kde za vztažné napětí  $\sigma_{mez}$  se obvykle zavádí mez kluzu v tlaku  $\sigma_{kd}$ . Z této rovnice určíme kritické napětí

$$\sigma_{kr} = \frac{\sigma_{kd}}{c}$$

a kritickou sílu

$$F_{kr} = \sigma_{kr} A = \frac{\sigma_{kd}}{c} A. \quad (1.60)$$

Příklad hodnot součinitelů vzpěrnosti v závislosti na štíhlostním poměru  $\lambda$ , podle normy ČSN 05 0110, je uveden v tabulce. 1.1.

#### **Příklad 1.1: Postup při dimenzování prutů na vzpěr\_\_\_\_\_**

Máme za úkol navrhnout pro ocelovou vzpěru kruhového průřezu, kloubově uloženou,

štíhlost $\lambda$	Součinitel vzpěrnosti $c$		
	Ocel 10 370	Ocel 10 520	Dřevo
10	1,03	1,03	1,02
20	1,05	1,05	1,10
30	1,08	1,09	1,19
40	1,12	1,14	1,30
50	1,17	1,21	1,43
60	1,24	1,32	1,59
70	1,33	1,47	1,78
80	1,44	1,68	2,03
90	1,59	1,95	2,37
100	1,77	2,26	2,83
110	1,99	2,63	3,43
120	2,23	3,03	4,09
130	2,51	3,48	4,79
140	2,82	3,97	5,56
150	3,15	4,49	6,38
160	3,51	5,05	7,26
170	3,89	5,64	-
180	4,30	6,28	-
190	4,73	6,94	-
200	5,18	7,65	-

Tabulka 1.1: Součinitele vzpěrnosti dle ČSN 05 0110.

přípustný průměr  $d$ . Vzpěra je stlačována silou  $F = 250$  kN. Mechanické vlastnosti použité oceli jsou:  $E = 2,1 \cdot 10^5$  MPa;  $\sigma_{kd} = 360$  MPa;  $\sigma_u = 310$  MPa. Materiál má stejné mechanické vlastnosti v tahu i tlaku. Minimální požadovaná bezpečnost  $k_{kr} = 4$  a délka vzpěry  $l = 1$  m.

### Postup výpočtu:

Ze zadaných vstupních dat nelze určit štíhlostní poměr  $\lambda$ , není známý průměr vzpěry. Nelze proto stanovit zda bude úloha řešena podle Eulerova nebo Tetmajerova vztahu (obr. 1.14), tj. v oblasti elastické nebo plastické. V takovém případě zahájíme výpočet kritické síly podle Eulera

$$F_{kr} = F_{\varepsilon} = \pi^2 \frac{EJ_{min}}{l^2} = Fk_{kr}, \quad (\text{P-1.a})$$

odkud stanovíme

$$J = \frac{Fl^2}{\pi^2 E} k_{kr} = \frac{250 \cdot 10^3 \cdot 10^6}{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5} \cdot 4 = 483 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

a průměr vzpěry

$$d_1 \geq \left( \frac{64J}{\pi} \right)^{1/4} = \left( \frac{64 \cdot 483 \cdot 10^3}{\pi} \right)^{1/4} = 56 \text{ mm}. \quad (\text{P-1.b})$$

Nyní můžeme určit štíhlostní poměr vzpěry

$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{4l}{d_1} = \frac{4 \cdot 10^3}{56} = 71,43 \quad (\text{P-1.c})$$

a porovnat ho s mezní štíhlostí (1.52)

$$\lambda_M = \pi \left( \frac{E}{\sigma_u} \right)^{1/2} = \pi \left( \frac{2,1 \cdot 10^5}{310} \right)^{1/2} = 81,77. \quad (\text{P-1.d})$$

Ze srovnání numerických výsledků rovnic (P-1.c) a (P-1.d) vyplývá, že výpočet průměru vzpěry  $d_1$  podle Eulera nevyhovuje,  $\lambda < \lambda_M$ . Úlohu je nutné tudíž řešit podle Tetmajera, kde platí

$$\sigma_{kr} = \sigma_{TET} = \sigma_{kd} - (\sigma_{kd} - \sigma_u) \frac{\lambda}{\lambda_M} = \sigma_{kd} - (\sigma_{kd} - \sigma_u) \frac{4l}{d \lambda_M}. \quad (\text{P-1.e})$$

Zároveň platí

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} = \frac{4 F k_{kr}}{\pi d^2}. \quad (\text{P-1.f})$$

Dáme-li do rovnosti rovnice (P-1.e) a (P-1.f), tak po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici

$$\sigma_{kd} d^2 - (\sigma_{kd} - \sigma_u) \frac{4l}{\lambda_M} d - \frac{4 F k_{kr}}{\pi} = 0, \quad (\text{P-1.g})$$

odkud

$$d_{1,2} = 62,97 \text{ mm} \quad \text{a} \quad -56,17 \text{ mm}.$$

Průměr vzpěry volíme

$$d = 63 \text{ mm}.$$

•

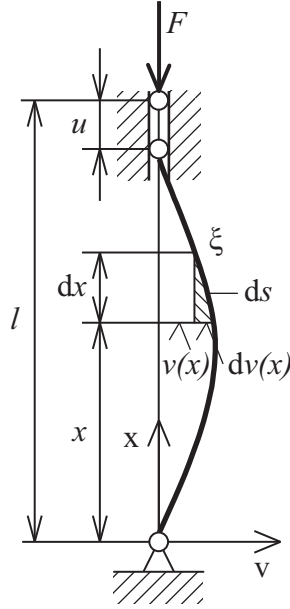
## 1.5 Přibližné řešení kritické síly

Složitější případy řešení stability přímých prutů v pružné oblasti, tj. stanovení kritické síly, se určuje pomocí přibližných metod. Jedná se o případy, kdy vnější osově síly působí mimo koncové řezy vzpěry nebo o pruty s proměnlivými průřezy. Nejčastěji používanou přibližnou metodou je **Rayleighova energetická metoda** a také **metoda postupných aproximací**. Přibližnost metod spočívá ve volbě funkce průhybové křivky a splnění okrajových podmínek.

### 1.5.1 Rayleighova energetická metoda

Kritickému zatížení vzpěry odpovídá indiferentní stav rovnováhy, který v rámci elastických deformací umožňuje libovolné prohnutí prutu (obr. 1.16). Vychýlením přímého prutu do prohnutého stavu se změní jeho deformační energie o přírůstek práce vnitřních sil  $\Delta U$  a vnější síla  $F$  vykoná práci  $\Delta W$  na posuvu  $u$ . V důsledku indiferentní rovnováhy je pro libovolné prohnutí přírůstek práce vnitřních a vnějších sil stejný

$$\Delta U = \Delta W. \quad (1.61)$$



Obrázek 1.16:

Přírůstek deformační energie  $\Delta U$  od ohybu určíme podle vztahu

$$\Delta U = \frac{1}{2} \int_{(l)} \frac{M_o^2(x)}{EJ_{min}} dx \quad (1.62)$$

a práci vnější síly

$$\Delta W = F_{kr} u. \quad (1.63)$$

Ohybový moment, v rovnici (1.62), v řezu  $\xi$

$$M_o(x) = F_{kr} v(x),$$

takže deformační energie

$$\Delta U = \frac{F_{kr}^2}{2} \int_0^l \frac{[v(x)]^2}{EJ_{min}} dx. \quad (1.64)$$

Pro stanovení posuvu kloubu  $u$  (rov. 1.63) je nutné určit rektifikaci průhybové křivky  $v(x)$ . Z obrázku 1.16 plyne

$$ds = [dx^2 + [dv(x)]^2]^{1/2} = dx [1 + [v'(x)]^2]^{1/2}. \quad (1.65)$$

S ohledem na malou křivost průhybové křivky lze tento vztah upravit podle pravidel počítání s malými čísly ( $v'(x) \ll 1$ ) na tvar

$$ds = dx \left[ 1 + \frac{1}{2} [v'(x)]^2 \right] \quad (1.66)$$

a stanovit posuv působíště síly  $F$

$$u = \int_0^l (ds - dx) = \int_0^l \left[ 1 + \frac{1}{2} [v'(x)]^2 - 1 \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^l [v'(x)]^2 dx. \quad (1.67)$$

Práce vnější síly (1.63) pak je

$$\Delta W = \frac{F_{kr}}{2} \int_0^l [v'(x)]^2 dx. \quad (1.68)$$

Z rovnosti prací (1.64) a (1.68) v rov. (1.61) určíme kritickou sílu

$$F_{kr} = \frac{\int_0^l [v'(x)]^2 dx}{\int_0^l \frac{[v(x)]^2}{EJ} dx}. \quad (1.69)$$

Volená funkce průhybové křivky  $v(x)$  je vyjádřena ve tvaru

$$v(x) = v_0 \eta(x),$$

kde  $\eta(x)$  je tvarová funkce a  $v_0$  konstanta – amplituda křivky  $v(x)$ , která se v rovnici (1.69) vykrátí. Tak například zvolíme-li pro kloubové uložení prizmatické vzpěry přesnou funkci průhybové křivky ve tvaru, který jsme odvodili z diferenciální rovnice průhybové čáry (1.19)

$$v(x) = v_0 \sin \frac{\pi x}{l},$$

je tvarová funkce

$$\eta(x) = \sin \frac{\pi x}{l} \quad \text{a} \quad \eta'(x) = \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}$$

a kritickou sílu určíme podle rovnice (1.69)

$$F_{kr} = EJ_{min} \frac{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx} = \pi^2 \frac{EJ_{min}}{l^2}.$$

K výsledku připomeňme, že stanovená kritická síla podle přibližné energetické Rayleighovy metody je za předpokladu volby exaktní průhybové křivky stejná, jako výsledek získaný z diferenciální rovnice průhybové čáry (1.15) vzpěry, nacházející se rovněž v indiferentním stavu rovnováhy. Stejný výsledek potvrzuje platnost podmínky minima deformační energie rovněž u Rayleighovy metody. Z toho vyplývá, že každé zvolené funkci, která se liší od vlastní funkce, přísluší v oblasti elastického přetvoření větší deformační energie.

### 1.5.2 Metoda postupných aproximací

Metoda postupných aproximací ke stanovení přibližné velikosti kritické síly rovněž aplikuje diferenciální rovnici průhybové křivky od ohybových účinků vzpěry, nacházející se v indiferentním stavu rovnováhy vnitřních a vnějších sil. K názornosti výkladu použijeme opět vzpěru kloubově uloženou. Ohybový moment působící v obecném řezu vzpěry má tvar

$$M_o(x) = F_0 v_0(x), \quad (1.70)$$

kde  $v_0(x)$  je zvolená vstupní funkce průhybové křivky (1.14) a  $F_0$  předpokládaná kritická velikost vzpěrné síly. Diferenciální rovnice první aproximace průhybové křivky  $v_1(x)$  je

$$v_1''(x) = -\frac{M_0(x)}{EJ} = -F_0 \frac{v_0(x)}{EJ}. \quad (1.71)$$

řešením této rovnice, s respektováním okrajových podmínek, získáme funkci průhybové křivky  $v_1(x)$ . Kontrolu první aproximace, zda je vyhovující, zjistíme z poměru

$$\frac{v_0(x)}{v_1(x)} = \zeta_1(x). \quad (1.72)$$

Není-li tento poměr roven konstantě v celém rozsahu nezávisle proměnné  $x$ , použijeme v prvním přiblížení zjištěnou funkci  $v_1(x)$ , ke stanovení druhé aproximace

$$v_2''(x) = -F_0 \frac{v_1(x)}{EJ}. \quad (1.73)$$

Stanovenou druhou aproximaci funkce průhybové křivky  $v_2(x)$  opět kontrolujeme poměrem dvou po sobě následujících aproximací

$$\frac{v_1(x)}{v_2(x)} = \zeta_2(x).$$

Naznačený postup se opakuje do stavu, kdy poměr dvou po sobě následujících aproximací

$$\frac{v_{n-1}(x)}{v_n(x)} = \zeta_n(x) = \text{konst} \pm \varepsilon, \quad (1.74)$$

kde  $\varepsilon$  je předem stanovená procentní odchylka a  $v_n(x)$  je hledaná funkce průhybové křivky, podle požadované přesnosti  $\varepsilon$ .

Poslední aproximaci  $v_n(x)$  jsme stanovili z diferenciální rovnice

$$v_n''(x) = -F_0 \frac{v_{n-1}(x)}{EJ}. \quad (1.75)$$

Současně lze pro zjištěnou funkci  $v_n(x)$  zapsat diferenciální rovnici průhybové čáry ve tvaru

$$v_n''(x) = -F_{kr} \frac{v_n(x)}{EJ}, \quad (1.76)$$

kde  $F_{kr}$  je skutečná kritická síla. Z rovnosti obou diferenciálních rovnic stanovíme kritickou sílu

$$F_{kr} = F_0 \frac{v_{n-1}(x)}{v_n(x)}. \quad (1.77)$$

### Příklad 1.2:

Jako příklad uvedeme postup při určování kritické síly kloubově uložené vzpěry, abychom mohli posoudit výhodnost aplikace metody postupných aproximací. Vstupní průhybovou funkci  $v_0(x)$  (1.71) navrheme rovnu konstantě  $v_0$ . Pak diferenciální rovnice průhybové křivky je

$$v_1''(x) = -F_0 \frac{v_0}{EJ}. \quad (\text{P-2.a})$$

řešením diferenciální rovnice a uplatněním okrajových podmínek kloubově uložené vzpěry

$$v_1(0) = 0 \quad \text{a} \quad v_1(l) = 0,$$

zjistíme tvar první aproximace průhybové křivky

$$v_1(x) = \frac{v_0}{2} \frac{F_0}{EJ} (lx - x^2). \quad (\text{P-2.b})$$

Poměr navržené a výpočtem stanovené průhybové křivky

$$\frac{v_0(x)}{v_1(x)}$$

se liší až o 33%. Je nutné pokračovat v získání další aproximace s tím, že použijeme jako vstupní funkci průhybovou křivku  $v_1(x)$  v rov. (P-2.b)

$$v_2''(x) = -F_0 \frac{v_1(x)}{EJ} = -\left(\frac{F_0}{EJ}\right)^2 \frac{v_0}{2} (lx - x^2). \quad (\text{P-2.c})$$

řešením diferenciální rovnice je druhá aproximace funkce průhybové křivky

$$v_2(x) = \frac{v_0}{24} \left(\frac{F_0}{EJ}\right)^2 (x^4 - 2lx^3 + l^3x). \quad (\text{P-2.d})$$

Z poměru

$$\frac{v_1(x)}{v_2(x)} = \frac{\frac{v_0}{2} \frac{F_0}{EJ} (lx - x^2)}{\frac{v_0}{24} \left(\frac{F_0}{EJ}\right)^2 (x^4 - 2lx^3 + l^3x)} \quad (\text{P-2.e})$$

například v místě  $x = \frac{l}{2}$ , určíme kritickou sílu

$$F_{kr} = 0,9737 \cdot \pi^2 \frac{EJ}{l^2}, \quad (\text{P-2.f})$$

kteřá se liší od přesného řešení cca o 2,63%. Pro praktické účely je to přijatelný rozdíl. Další aproximace  $\frac{v_2(x)}{v_3(x)}$  je již zcela vyhovující

$$\frac{v_2(x)}{v_3(x)} = \frac{\frac{v_0}{24} \left(\frac{F_0}{EJ}\right)^2 (x^4 - 2lx^3 + l^3x)}{\frac{v_0}{720} \left(\frac{F_0}{EJ}\right)^3 (3lx^5 - 5l^3x^3 - x^6 + 3l^5x)}. \quad (\text{P-2.g})$$

Uprostřed vzpěry pro  $x = \frac{l}{2}$  je odchylka od přesného řešení kritické síly pouze 0,34%.

$$F_{kr} = 0,9976 \cdot \pi^2 \frac{EJ}{l^2}. \quad (\text{P-2.h})$$

Pro zjednodušení jsme určovali kritickou sílu z poměru

$$\frac{v_{n-1}\left(\frac{l}{2}\right)}{v_n\left(\frac{l}{2}\right)}.$$

Věrohodnější výsledek získáme ze stanovení střední hodnoty poměru podle rov. (1.77) ve více bodech. Rovnici můžeme upravit na sumační tvar

$$F_n = F_{kr n} = F_0 \frac{\sum v_{n-1}(x_i)}{\sum v_n(x_i)} \quad (\text{P-2.i})$$

nebo integrální

$$F_n = F_{kr n} = F_0 \frac{\int_0^l v_{n-1}(x) dx}{\int_0^l v_n(x) dx} = F_0 \frac{A_{n-1}}{A_n} \quad (\text{P-2.j})$$

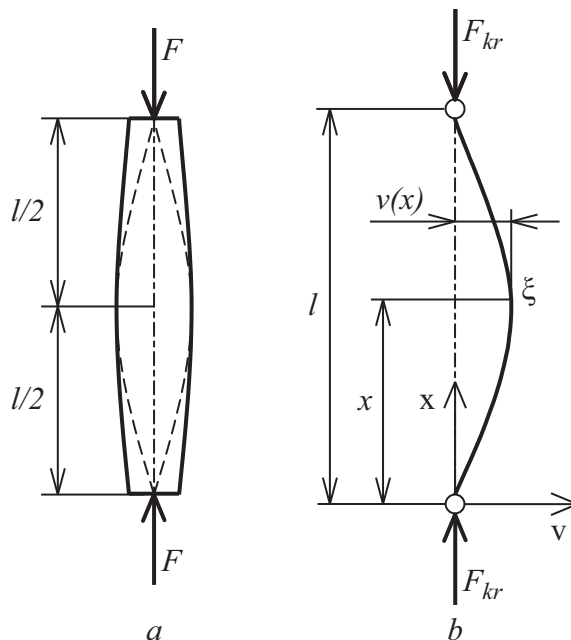
kde  $A_{n-1}$  a  $A_n$  jsou obsahy ploch omezené křivkami  $v_{n-1}$  a  $v_n$ .

•

## 1.6 Neprizmatické vzpěry

### 1.6.1 Symetrická vzpěra

Předpokládejme, že tyč je neprizmatická a průřez je symetrický ke střednímu řezu  $x = l/2$  obr. 1.17a. Konce vzpěry jsou uloženy kloubově.



Obrázek 1.17:

Diferenciální rovnice průhybové křivky namáhané kritickou silou  $F_{kr}$  je

$$v''(x) = -\frac{M_o(x)}{EJ(x)}. \quad (1.78)$$



Ohybový moment v řezu  $\xi$  (obr. 1.17b)

$$M_o(x) = F_{kr}v(x) \quad (1.79)$$

a kvadratický moment průřezu

$$J = J(x). \quad (1.80)$$

Po dosazení těchto vztahů do rov. (1.78)

$$v''(x) = -\frac{F_{kr}}{EJ(x)}v(x), \quad (1.81)$$

je patrné, že se jedná o lineární diferenciální rovnici 2. řádu s proměnlivým koeficientem  $J(x)$  při  $v(x)$ . Protože její řešení je obtížné i v jednoduchých případech, použijeme řešení přibližné (1.71) nebo opačný postup, kdy volíme  $v(x)$  a z rovnice (1.78) určíme  $J(x)$ . Zvolíme tvar průhybové křivky  $v(x)$  vyhovující okrajovým podmínkám s tím, že křivka musí být v intervalu  $0 \leq x \leq l$  vypuklá

$$v''(x) < 0. \quad (1.82)$$

Při zatížení kritickou silou  $F_{kr}$  se vzpěra nachází v indiferentním stavu rovnováhy a vypuklost zvolené průhybové křivky je v mezích Hookeova zákona libovolná. Za průhybovou křivku zvolíme např. parabolu s okrajovými podmínkami  $v(0) = v(l) = 0$ . Její tvar popisuje rovnice

$$v(x) = cx(l - x), \quad (1.83)$$

kde  $c$  je konstanta určující libovolnou vypuklost paraboly. Dále z druhé derivace

$$v''(x) = -2c < 0 \quad (1.84)$$

plyne

$$c > 0.$$

Z rovnice (1.81) stanovíme funkci změny průřezu

$$J(x) = -\frac{F_{kr}}{E} \frac{v(x)}{v''(x)} = \frac{F_{kr}}{2E} x(l - x). \quad (1.85)$$

Pro  $x = l/2$  je kvadratický moment průřezu maximální

$$J\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{F_{kr}}{8E} l^2 = J_{max}. \quad (1.86)$$

Odsud stanovíme podmínku pro kritickou sílu

$$F_{kr} = 8 \frac{E J_{max}}{l^2} = Fk, \quad (1.87)$$

kde  $k$  je součinitel bezpečnosti určující velikost síly  $F$ , zajišťující stabilní rovnováhu vzpěry. Proměnlivost kvadratického průřezu vzpěry stanovíme z poměru

$$\frac{J(x)}{J_{max}} = \frac{\frac{F_{kr}}{2E} x(l - x)}{\frac{F_{kr}}{8E} l^2} = 4 \frac{x(l - x)}{l^2}, \quad (1.88)$$

odkud je např. pro kruhový průřez změna průměru  $d(x)$  vzpěry určena vztahem

$$d(x) = d_{max} \left( 4 \frac{x(l-x)}{l^2} \right)^{1/4}. \quad (1.89)$$

Konce vzpěry, vzhledem k  $d(0) = d(l) = 0$  se upravují způsobem naznačeným na obr. 1.17a, podle podmínky otlačení

$$\sigma_{otl} A_0 \geq F = \frac{F_{kr}}{k}, \quad (1.90)$$

odkud určíme upravenou velikost koncového průřezu vzpěry  $A_0 = A(0)$  s ohledem na předepsané napětí  $\sigma_{otl}$

$$A_0 \geq \frac{F_{kr}}{k\sigma_{otl}}. \quad (1.91)$$

# Obsah

<b>1</b>	<b>Stabilita přímých prutů</b>	<b>1</b>
1.1	Úvod . . . . .	1
1.2	Eulerova kritická síla . . . . .	3
1.2.1	První případ vzpěru . . . . .	3
1.2.2	Druhý případ vzpěru . . . . .	5
1.2.3	Třetí případ vzpěru . . . . .	7
1.2.4	Čtvrtý případ vzpěru . . . . .	10
1.3	Podmínka stability ve vzpěru v nelineární oblasti . . . . .	13
1.4	Výpočet kritické síly v oblasti plastických deformací . . . . .	15
1.4.1	Zavedení redukovaného modulu pružnosti . . . . .	15
1.4.2	Řešení podle Tetmajera . . . . .	16
1.4.3	Součinitel vzpěrnosti . . . . .	17
1.5	Přibližné řešení kritické síly . . . . .	19
1.5.1	Rayleighova energetická metoda . . . . .	19
1.5.2	Metoda postupných aproximací . . . . .	21
1.6	Nepřizmatické vzpěry . . . . .	24
1.6.1	Symetrická vzpěra . . . . .	24