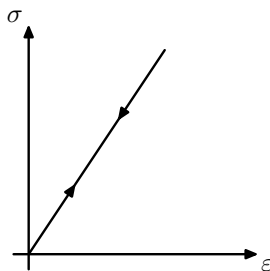


Kapitola 1

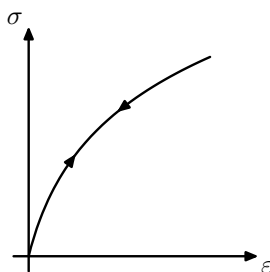
Základy teorie plasticity

1.1 Úvod

V předešlých kapitolách jsme se zabývali případy, kdy se zatížené těleso po odlehčení vrátí do své původní (nezatížené) polohy—nezmění své původní rozměry ani tvar. Říkáme, že všechny deformace byly pružné. Závislost mezi napětím a deformacemi mohla být lineární či nelineární, ale vždy byla vratná, viz obrázek 1.1 a 1.2. Probíhá-li však od-

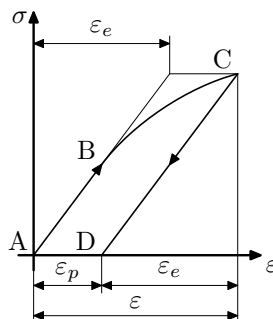


Obrázek 1.1: Elastický lineární materiál



Obrázek 1.2: Elastický nelineární materiál

lehčování po jiné čáře nežli zatěžování, zůstanou v tělese i po odlehčení jisté deformace, které nazýváme trvalé nebo také zbytkové či plastické, viz obrázek 1.3. Z experimentálních pokusů vyplývá, že u mnoha materiálů (zejména materiálů konstrukčních) probíhá odlehčování po přímce CD (viz obr. 1.3), která je rovnoběžná s počáteční lineární částí AB pracovního diagramu.



Obrázek 1.3: Plastické chování materiálu

Z obrázku je vidět, že celková deformace ε v napjatém stavu je rovna součtu deformace trvalé (plastické, zbytkové) ε_p a deformace pružné ε_e , jejíž velikost je rovna velikosti deformace, která by v tělese vznikla, kdyby si materiál zachoval pružné vlastnosti až do uvažovaného stavu napjatosti. Platí tedy

$$\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_e.$$

Plastická čili zbytková deformace je tak v případě jednoosé napjatosti dána rozdílem celkové (skutečné) deformace a deformace, která by v tělese vznikla, pokud by chování v průběhu celého zatěžování bylo pružné (elastické)

$$\varepsilon_p = \varepsilon - \varepsilon_e. \quad (1.1)$$

Podobné pravidlo platí i pro posuvy, jak je zřejmé násobením vztahu (1.1) délkou či pro napětí. Obecně můžeme vyslovit větu: *Zbytková napětí (deformace, posuvy), která vzniknou v tělese v odlehčeném stavu, lze určit jako rozdíl hodnot výsledných (skutečná hodnota v daném napjatém stavu) a hodnot stanovených za předpokladu, že si těleso zachovalo pružné vlastnosti v celém průběhu zatěžování při zatížení stejnými účinkami.*

1.2 Pracovní diagram

Závislost mezi deformacemi a napětím je známa z experimentálních pokusů provedených na daném materiálu. Aby bylo možné provádět matematické formulace a operace, je obvykle výhodné schematizovat pracovní diagram. Schematizujeme buď diagram celý, nebo alespoň jeho počáteční část. Nejčastěji se schematizace provádí mocninnou závislostí

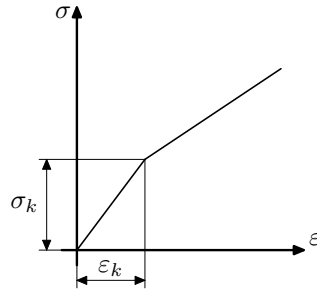
$$\varepsilon = K\sigma^m.$$

Konstanty K a m je nutno určit na základě výsledků pokusů. Jinou obvyklou schematizací pracovního diagramu je lomená čára, viz obrázek 1.4. Pokud je $\sigma \leq \sigma_k$ ($\varepsilon \leq \varepsilon_k$), platí

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon},$$

kde E je modul pružnosti v tahu. Pro $\sigma \geq \sigma_k$ ($\varepsilon \geq \varepsilon_k$) lze psát

$$\bar{E} = \frac{\sigma - \sigma_k}{\varepsilon - \varepsilon_k},$$

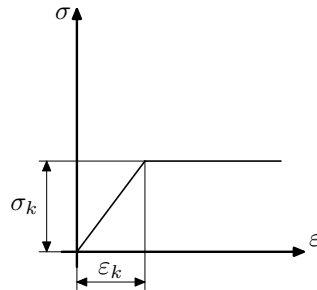


Obrázek 1.4: Lomená schematizace pracovního diagramu

přičemž \bar{E} se nazývá modul zpevnění. Pro měkké houževnaté oceli je

$$\bar{E} = 0,$$

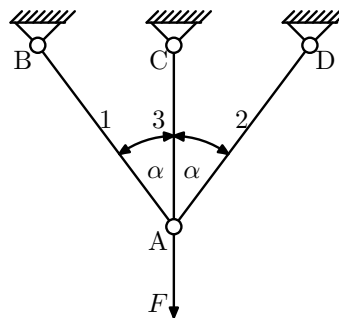
viz obrázek 1.5. v tomto případě hovoříme o ideální plasticitě.



Obrázek 1.5: Ideálně plastický materiál

1.3 Přímé pruty a prutové soustavy namáhané tahem

Uvažujme staticky namáhanou prutovou soustavu z obrázku 1.6. Soustava sestává z prutů stejného průřezu A , materiál prutů má pracovní diagram dle obrázku 1.5.



Obrázek 1.6: Prutová soustava namáhaná tahem

V minulých kapitolách jsme zavedli pojem součinitele bezpečnosti jako poměr dvou napětí, například meze kluzu a skutečného napětí. Nyní tento pojem zavedme nově jako

poměr zatížení F_k , někdy značeného jako F_{mez} , a zatížení dovoleného F_{dov} . Tak máme

$$k = \frac{F_k}{F_{dov}}.$$

Pokud je zatížení naší konstrukce (obr. 1.6) dostatečně malé, můžeme při analýze postupovat, jak bylo popsáno v předchozích kapitolách věnovaných pružným deformacím. Tak, například užitím Castiglianovy věty, máme

$$N_1 = N_2 = \frac{F \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \quad (1.2)$$

a

$$N_3 = \frac{F}{1 + 2 \cos^3 \alpha}. \quad (1.3)$$

Tyto vztahy platí pouze tehdy, je-li namáhání všech prutů menší nežli mez kluzu σ_k . Ze všech tří prutů je nejvíce namáhán prut třetí. Ten tedy jako první zplastizuje—nastane rovnost $\sigma = \sigma_k$. Tento prut pak přenáší sílu

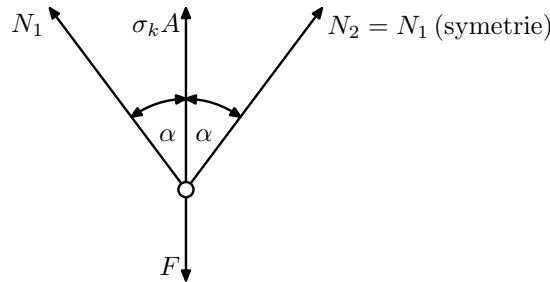
$$N_3 = \sigma_k \cdot A.$$

Větší sílu již přenést nedokáže. Tento vztah poprvé nastane při zatížení silou

$$F = \sigma_k A (1 + 2 \cos^3 \alpha),$$

jak plyne ze vztahu (1.3).

Pro sílu $F > \sigma_k A (1 + 2 \cos^3 \alpha)$ již vztahy (1.2) a (1.3) neplatí, jak je vidět z rovnice rovnováhy styčnicku prvků na obrázku 1.7:



Obrázek 1.7: Rovnováha styčnicku prvků

$$2N_1 \cos \alpha + \sigma_k A - F = 0$$

a tedy

$$N_1 = \frac{F - \sigma_k A}{2 \cos \alpha}. \quad (1.4)$$

Mezní stav (hroucení konstrukce) nastane tehdy, když také napětí v prutu 1 a 2 dosáhne meze kluzu

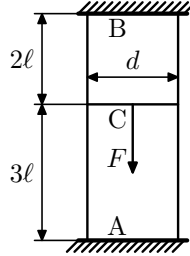
$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \sigma_k.$$

Odtud a z (1.4) plyne síla, kterou je jako největší možno danou soustavou přenést:

$$F_k = F_{mez} = \sigma_k A (1 + 2 \cos \alpha).$$

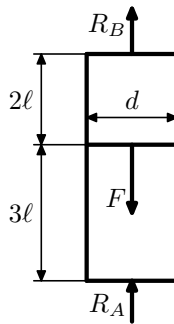
Příklad 1.1:

Uvažujme sloupek kruhového průřezu o průměru d na obou koncích pevně upevněný dle obrázku P-1.1. Materiál sloupku je ideálně plastický s mezí kluzu σ_k . Určeme sílu



Obrázek P-1.1: Sloupek

$F = F_{mez} = F_k$, která způsobí dosažení mezního stavu sloupku (úplně plastický stav). Dále určíme zbytková napětí a zbytkové deformace po úplném odlehčení ze stavu těsně před dosažením síly F_k .



Obrázek P-1.2: Sloupek–uvolnění

Řešení začneme elastickým výpočtem. Sloupek uvolníme, jak je znázorněno na obrázku P-1.2, a napíšeme rovnice rovnováhy

$$R_B - F + R_A = 0. \quad (\text{P-1.a})$$

Vidíme, že neznámé jsou dvě, zatímco rovnici rovnováhy máme jen jednu. Úloha je tedy jedenkrát staticky neurčitá. Rovnici rovnováhy (P-1.a) musíme doplnit deformační podmínkou, která říká, že prodloužení sloupku je nulové:

$$\begin{aligned} \Delta l &= 0, \\ \Delta l_{BC} + \Delta l_{AC} &= 0, \\ \frac{R_B \cdot 2l}{EA} + \frac{(R_B - F) \cdot 3l}{EA} &= 0, \\ 5R_B &= 3F. \end{aligned} \quad (\text{P-1.b})$$

Tak dostáváme soustavu dvou rovnic (P-1.a) a (P-1.b) pro dvě neznámé R_A a R_B , kterou rozřešíme

$$R_B = \frac{3F}{5},$$

$$R_A = \frac{2F}{5}$$

a vyjádříme vnitřní síly a napětí

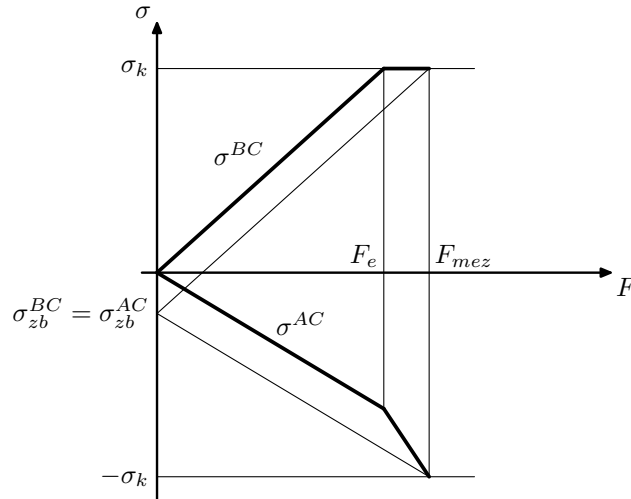
$$N_{BC} = R_B = \frac{3F}{5},$$

$$N_{AC} = R_B - F = -\frac{2F}{5},$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A} = \frac{3F}{5A},$$

$$\sigma_{AC} = \frac{N_{AC}}{A} = -\frac{2F}{5A},$$

kde $A = \frac{\pi d^2}{4}$. Průběh změny velikosti napětí v závislosti na síle znázorníme diagramem na obrázku P-1.3. Uvedené výrazy platí tak dlouho, nežli buď σ_{BC} , či σ_{AC} dosáhne



Obrázek P-1.3: Sloupek–závislost σ – F

meze kluzu ($\pm\sigma_k$). Jako první meze kluzu dosáhne napětí σ_{BC} :

$$\sigma_{BC} = \sigma_k,$$

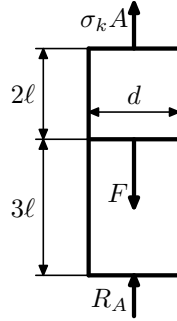
$$\frac{3}{5} \frac{F_e}{A} = \sigma_k$$

a

$$F_e = \frac{5}{3} \sigma_k A,$$

kde síla F_e je největší síla, při níž je chování konstrukce ještě elastické. Při zatížení silou $F > F_e$ nastává stav elasto-plastický, uvolněný sloupek je zatížen tak, jak ukazuje obrázek P-1.4 a rovnice rovnováhy má tvar

$$\sigma_k A - F + R_A. \quad (\text{P-1.c})$$



Obrázek P-1.4: Sloupek–uvolnění v elastoplastickém stavu ($F_e \leq F \leq F_{mez}$)

Reakce R_A má tedy velikost

$$R_A = F - \sigma_k A,$$

vnitřní síla

$$N_{AC} = -R_A = \sigma_k A - F$$

a napětí

$$\sigma_{AC} = \sigma_k - \frac{F}{A},$$

$$\sigma_{BC} = \sigma_k.$$

Průběh napětí pro $F \geq F_e$ znázorníme v diagramu na obrázku P-1.3. Mezní síla F_{mez} (síla při níž se konstrukce hrouť) nastane, je-li

$$\sigma_{AC} = -\sigma_k,$$

tedy

$$-\sigma_k = \sigma_k - \frac{F_{mez}}{A}$$

a

$$F_{mez} = 2A\sigma_k.$$

•

1.3.1 Zbytková napětí

Při odlehčování se materiál chová tak, jak se chová v elastickém stavu, tj. odlehčování probíhá po rovnoběžkách s průběhem elastické fáze zatěžování, viz obrázek P-1.3. Pak můžeme hodnotu zbytkových napětí odečíst z grafu. Totéž lze vyjádřit vztahem

$$\sigma_{zb} = \sigma_{ep} - \sigma_{fel},$$

kde σ_{ep} je napětí v elasto-plastickém či čistě plastickém stavu a σ_{fel} je fiktivní napětí vypočtené dle vztahů platných v elastické oblasti při zatížení účinky vyvolávajícími

plastický stav, tedy za předpokladu, že by si materiál zachoval v celém rozsahu zatěžování elastické vlastnosti. Tak

$$\sigma_{zb}^{BC} = \sigma_k - \frac{3}{5} \frac{F_{mez}}{A} = \sigma_k - \frac{3}{5} \cdot \frac{2\sigma_k A}{A} = \frac{1}{5} \sigma_k,$$

$$\sigma_{zb}^{AC} = -\sigma_k - \left(-\frac{2}{5} \frac{F_{mez}}{A} \right) = -\sigma_k + \frac{2}{5} \frac{2\sigma_k A}{A} = -\frac{1}{5} \sigma_k.$$

Vidíme také, že sloupek po odlehčení je (a vždy musí být) v samorovnovážném stavu

$$\sigma_{zb}^{BC} A = \sigma_{zb}^{AC} A.$$

1.3.2 Zbytkové posuvy sloupku

Sledujme posuv řezu C. v elastickém stavu platí

$$\delta_C = \frac{N_{BC} 2\ell}{EA} = \frac{6}{5} \frac{F\ell}{EA} \quad (1.5)$$

či

$$\delta_C = -\frac{N_{AC} 3\ell}{EA} = \frac{6}{5} \frac{F\ell}{EA}.$$

V elasto-plastickém stavu je ve zplastizované části deformace nekontrolovatelná. V elastické části (úsek AC) však platí elastický vztah

$$\delta_C = -\frac{N_{AC} 3\ell}{EA} = \frac{(F - \sigma_k A) \cdot 3\ell}{EA}.$$

Zbytková deformace

$$\delta_{zb}^C = \delta_{skuten}^C - \delta_{fel}^C,$$

kde

$$\delta_{skuten}^C = \frac{(F_{mez} - \sigma_k A) \cdot 3\ell}{EA} = \frac{3\ell\sigma_k}{E}$$

a podle (1.5)

$$\delta_{fel}^C = \frac{6}{5} \frac{F_{mez}\ell}{EA} = \frac{12}{5} \frac{\sigma_k \ell}{E}.$$

Tedy (porovnej s obrázkem 1.8)

$$\delta_{zb}^C = \frac{3}{5} \frac{\sigma_k \ell}{E}.$$

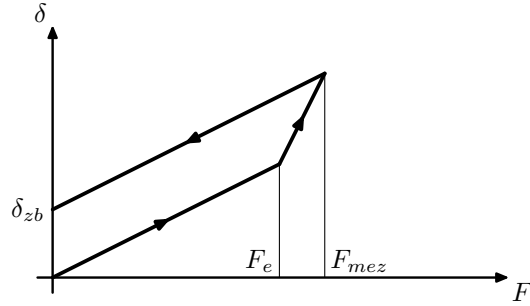
Označíme-li maximální přípustnou sílu F_D , pak součinitel bezpečnosti odpovídající mezní únosnosti určíme poměrem

$$k = \frac{F_{mez}}{F_D}.$$

Zvolíme-li bezpečnost vzhledem k meznímu stavu únosnosti, například $k = 2$, pak bude

$$F_{provozní} \leq F_D = \frac{F_{mez}}{k} = \frac{F_{mez}}{2} = \frac{2A\sigma_k}{2} = A\sigma_k \leq F_{el}$$

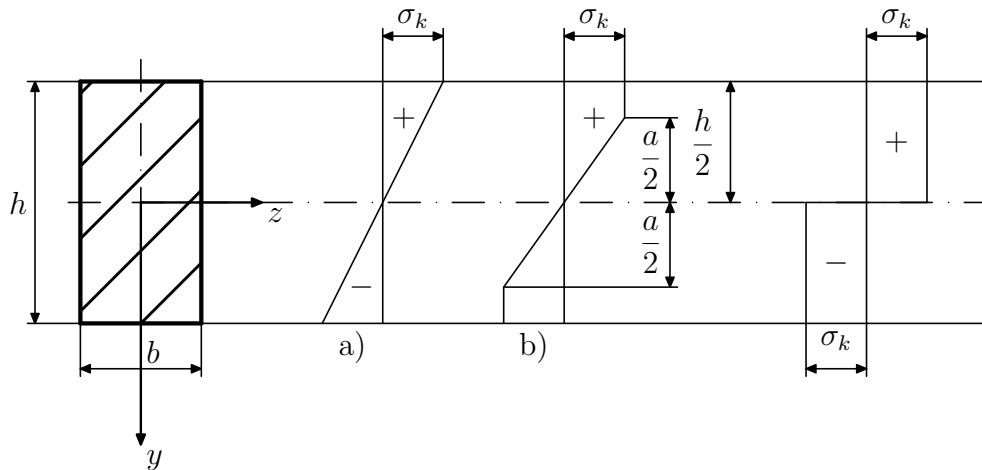
a provozní napětí splňující zvolenou bezpečnost tedy nevyvolá žádné plastické deformace (nedojde k porušení elastického stavu).



Obrázek 1.8: Sloupek–závislost δ – F

1.4 Ohyb při ideální plasticitě

Uvažujeme-li nosník obdélníkového průřezu (viz 1.9) namáhaný prostým rovinným ohybem, zhotovený z materiálu ideálně plastického s chováním shodným v tahu i tlaku. Označme M_{oel} hodnotu vnitřního ohybového momentu vyvolaného napětím, graficky



Obrázek 1.9: Ohyb

znázorněném na obrázku 1.9 a), kde je v krajním vláknu právě dosaženo meze kluzu při lineárním rozložení napětí. Jak víme z předchozích kapitol

$$M_{oel} = W_o \sigma_k = \frac{1}{6} b h^2 \sigma_k. \quad (1.6)$$

Průřez však může přenášet ještě větší vnitřní ohybový moment, jak je naznačeno průběhem napětí 1.9 b). Tento stav napjatosti označujeme jako pružně-plastický. Střední oblast o výšce a je namáhána elasticky, vně této oblasti se nachází oblasti ve stavu plastickém. Ohybový moment je dán součtem ohybových momentů vnitřních sil pružné oblasti a vnitřních sil oblasti plastické

$$M_{oep} = \frac{1}{6} b a^2 \sigma_k + 2 \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_k b y dy$$

odkud

$$M_{oep} = \frac{1}{12} \sigma_k b (3h^2 - a^2). \quad (1.7)$$

Pro čistě plastický stav je průběh napětí znázorněn na obrázku 1.9 zcela vpravo. Střední elastická zóna zde zcela mizí ($a = 0$) a pro ohybový moment plyne z posledního vztahu

$$M_{opl} = \frac{1}{4}bh^2\sigma_k. \quad (1.8)$$

Konec pružné napjatosti a počátek napjatosti pružně-plastické je dán hodnotou M_{oel} . Čistě plastický stav je dosažen při M_{opl} . Porovnáním výrazů (1.6) a (1.8) plyne

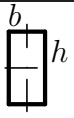


$$\frac{M_{opl}}{M_{oel}} = \frac{3}{2}.$$

Analogicky ke vztahu (1.6) bývá zvykem psát výraz (1.8) též ve tvaru

$$M_{opl} = W_{opl}\sigma_k.$$

Hodnota W_{opl} , zvaná modul průřezu, v plasticitě závisí (tak jako poměr $\frac{M_{opl}}{M_{oel}}$) na tvaru průřezu. Pro vybrané průřezy jsou tyto charakteristiky shrnuty v tabulce 1.1.

Tabulka 1.1: Průřezové charakteristiky v plasticitě

Průřez			
W_{opl}	$\frac{bh^2}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$	$\frac{d^3}{6}$
$\frac{M_{opl}}{M_{oel}}$	1,5	2	$\frac{16}{3\pi}$

1.4.1 Zbytková napětí

Pokud po zatížení nosníku momentem $M_{oep} \in (M_{oel}, M_{opl})$ nosník odlehčíme, určíme průběhy zbytkových napětí tak, že od průběhu napětí z obrázku 1.9 odečteme lineární průběh napětí, které by odpovídalo příslušnému zatěžujícímu momentu za předpokladu platnosti elastických vlastností. Například v případě zatížení momentem M_{opl} bychom měli

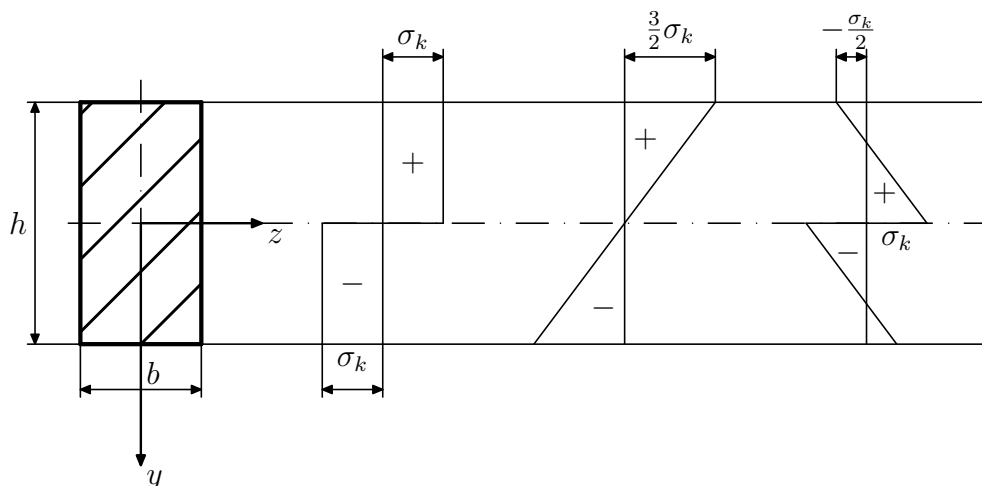
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{opl}}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{\frac{1}{4}bh^2\sigma_k}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{3}{2}\sigma_k$$

a průběhy napětí jsou patrné z obrázku 1.10.

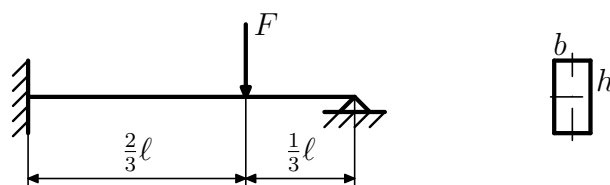
1.4.2 Příklad

Určete velikost mezní síly F_{mez} , která způsobí mezní stav nosníku zobrazeného na obrázku 1.11 s průřezem tvaru obdélníku.

Pokud nás zajímá pouze mezní síla (nezajímá nás zbytkové napětí), není nutno provádět elastický výpočet. Vystačíme, například, s následující metodou, která vychází z rovnosti virtuální práce vnějších a vnitřních sil v okamžiku vzniku plastického mechanismu (okamžiku dosažení mezní síly) viz obrázek 1.12. Plastický kloub vzniká v místech největšího vnitřního momentu. Místo, kde vznikne plastický kloub, je nutné

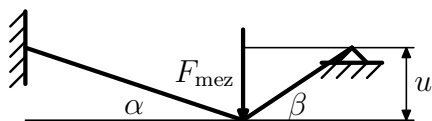


Obrázek 1.10: Zbytková napětí při ohybu



Obrázek 1.11: Ohýbaný nosník

odhadnout na základě zkušenosti s elastickou analýzou nosníku či užitím jisté optimalizační metody. Pokud nejsme schopni tato místa s jistým stupněm jistoty určit, nezbyvá, nežli provést kompletní elastický výpočet. Obecně platí, že lokální extrém ohybového momentu bývá v místech vetknutí a v místech působení izolovaných sil. Práce vnějších



Obrázek 1.12: Plastický mechanismus

sil

$$W_{\text{int}} = F_{\text{mez}} u$$

a práce vnitřních sil

$$W_{\text{ext}} = 2M_{\text{opl}}\alpha + M_{\text{opl}}\beta,$$

kde vzhledem k uvažování nekonečně malých posuvů

$$\alpha = \frac{u}{\frac{2}{3}\ell}$$

a

$$\beta = \frac{u}{\frac{1}{3}\ell}$$

a plastický moment

$$M_{opl} = \frac{A}{2} e \sigma_k = \frac{bh}{2} \frac{h}{2} \sigma_k = \sigma_k \frac{bh^2}{4}.$$

Tedy

$$F_{mez} u = 2M_{opl} \alpha + M_{opl} \beta,$$

$$F_{mez} u = \sigma_k \frac{bh^2}{4} \left(2 \frac{u}{\frac{2}{3}\ell} + \frac{u}{\frac{1}{3}\ell} \right)$$

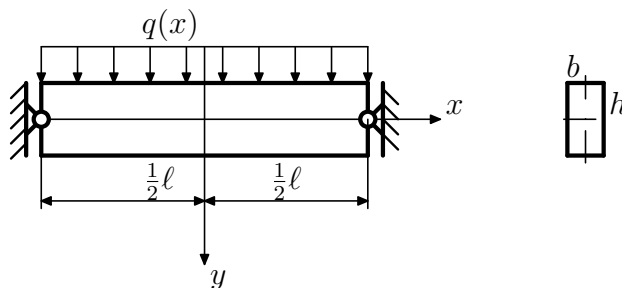
a mezní síla

$$F_{mez} = \sigma_k \frac{bh^2}{\ell} \frac{3}{2}.$$

Je-li možných plastických mechanismů větší počet, pak mezní účinek je ten minimální ze všech možných případů.

1.4.3 Příklad

U nosníku z obrázku 1.13 určete tvar hranice pružné a plastické oblasti pro spojitě zatížení $q_{el} \leq q \leq q_{mez}$. Uvažujte ideálně plastický materiál. Průběh ohybového momentu,



Obrázek 1.13: Spojitě obtížený nosník

při uvažování zvoleného souřadného systému, je

$$M_o(x) = \frac{q}{2} \left(\left(\frac{\ell}{2} \right)^2 - x^2 \right).$$

Maximální ohybový moment je uprostřed nosníku ($x = 0$) a má velikost

$$M_{o\max} = \frac{q\ell^2}{8}.$$

Elastické vztahy přestávají platit pro moment

$$M_{oel} = \sigma_k \frac{bh^2}{6}.$$

Tento ohybový moment odpovídá zatížení o velikosti

$$q_{el} = \frac{8M_{oel}}{\ell^2} = \frac{4}{3} \frac{\sigma_k bh^2}{\ell^2}. \quad (1.9)$$

Vztah velikosti vnitřního ohybového momentu v elasto-plastické oblasti a rozměru elastické zóny a je dán vztahem (1.7)

$$M_{oep} = \frac{1}{12} \sigma_k b (3h^2 - a^2).$$

Z posledních dvou vztahů dostáváme

$$\frac{q}{2} \left(\left(\frac{\ell}{2} \right)^2 - x^2 \right) = \frac{1}{12} \sigma_k b h^2 \left(3 - \frac{a^2}{h^2} \right).$$

Užitím rovnosti (1.9) můžeme poslední vztah dále upravit do tvaru

$$\frac{x^2}{\frac{\ell^2}{4} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{q_{el}}{q} \right)} - \frac{a^2}{h^2 \left(\frac{2q}{q_{el}} - 3 \right)} = 1.$$

Závislost výšky elastické zóny a je pak znázorněna na obrázku 1.13.

1.5 Podmínky plasticity při víceosé napjatosti

V případě jednoosé napjatosti je odpověď na otázku, kdy začnou vznikat plastické deformace, jednoduchá. Je to v okamžiku, kdy napětí dosáhne hodnoty meze kluzu.

V případě víceosé napjatosti se počátek plastického stavu určuje dle podmínky plasticity. Těchto podmínek je celá řada a liší se dle návrhu různých autorů. My se zmíníme o dvou základních podmínkách plasticity.

1.5.1 Podmínka Saint-Venantova

Podmínka Saint-Venantova (známá také pod názvem Trescova nebo Maximálního smykového napětí) určuje počátek plastického stavu splněním rovnice

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \sigma_k,$$

kde σ_{\max} je maximální hlavní napětí a σ_{\min} minimální hlavní napětí.

1.5.2 Podmínka Huber-Hencky-Misesova (HMH)

Podmínka Huber-Hencky-Misesova bývá také nazývána Energetická podmínka či Podmínka intenzity napětí. Dle ní při počátku plastického stavu platí

$$\sigma_i = \sigma_k,$$

kde intenzita napětí σ_i je dána výrazem

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Můžeme poznamenat, že hodnota σ_i^2 je úměrná měrné potenciální energii spotřebované na změnu tvaru.

Vzájemný rozdíl Saint-Venantovy podmínky a podmínky energetické je maximálně 16%. Při rozvítých plastických deformacích dosahuje Poissonovo číslo hodnoty $\nu = 0,5$. Podle teorie malých pružně-plastických deformací platí mezi hlavními deformacemi a hlavními napětími vztahy

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \left(\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right),$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \left(\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) \right)$$

a

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \left(\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right),$$

kde

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$$

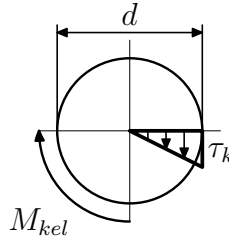
představuje intenzitu deformací.

1.6 Krut prutu kruhového průřezu

Na základě znalostí spojených s elastickou analýzou krutem namáhaných přímých prutů kruhového průřezu a při užití Saint-Venantovy podmínky plasticity můžeme určit maximální kroutící moment přenášený stále ještě elasticky namáhaným průřezem jako (viz obrázek 1.14)

$$M_{kel} = W_k \tau_{\max} = \frac{\pi d^3}{16} \frac{\sigma_k}{2} = \frac{\pi}{2} r^3 \frac{\sigma_k}{2}, \quad (1.10)$$

kde d je průměr kroucené tyče a r je její poloměr. Roste-li kroutící moment nad tuto



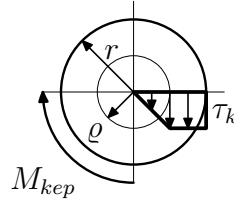
Obrázek 1.14: Krut elastický

hodnotu, napjatost přejde v pružně-plastickou. V mezikruhové části průřezu o vnitřním poloměru ϱ (viz obrázek 1.15) má pak napětí velikost $\tau_k = \frac{\sigma_k}{2}$. Ve střední (pružné) oblasti je rozdělení smykových napětí lineární, a proto platí

$$M_{kep} = \frac{\pi(2\varrho)^3}{16} \tau_k + \int_{\varrho}^r 2\pi\xi^2 \tau_k d\xi,$$

tedy

$$M_{kep} = \frac{2}{3} \pi \tau_k \left(r^3 - \frac{\varrho^3}{4} \right).$$



Obrázek 1.15: Krut elasto-plastický

Při čistě plastickém stavu pružná oblast vymizí ($\varrho = 0$) a kroučící moment nabude mezní hodnoty

$$M_{kpl} = \frac{2}{3} \pi r^3 \tau_k. \quad (1.11)$$

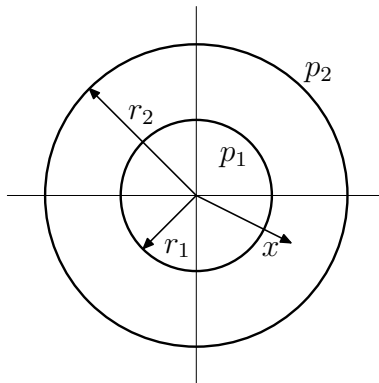
Porovnáním výrazů (1.10) a (1.11) plyne

$$\frac{M_{kpl}}{M_{kel}} = \frac{4}{3}.$$

Tento poměr se někdy nazývá součinitel přizpůsobení. Určení zbytkových napětí po odlehčení z pružně-plastického či čistě plastického stavu je analogické případům ohybu či tahu.

1.7 Plastická napjatost silnostěnné nádoby

Vyšetřme rozdělení napětí a hodnotu vnitřního přetlaku $p_1 > p_2$ při čistě plastické napjatosti silnostěnné nádoby zhotovené z ideálně plastického materiálu (obrázek 1.16). Pro rovnováhu elementu zde platí rovnice rovnováhy sestavená v kapitole věnované



Obrázek 1.16: Silnostěnná nádoba

elasticky namáhané silnostěnné nádobě

$$\sigma_r - \sigma_t + x\sigma_r' = 0. \quad (1.12)$$

V silnostěnné nádobě namáhané vnitřním přetlakem je vždy $\sigma_t > \sigma_r$. V případě dostatečně dlouhé trubky, a tedy nulové osové deformaci $\varepsilon_o = 0$, platí

$$\varepsilon_o = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \left(\sigma_o - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_t) \right) = 0,$$

tedy

$$\sigma_o = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_t), \quad (1.13)$$

a proto

$$\sigma_t > \sigma_o > \sigma_r.$$

Tak Saint-Venantova podmínka má tvar

$$\sigma_t - \sigma_r = \sigma_k.$$

Dosadíme-li hodnotu σ_o z (1.13) do energetické podmínky plasticity, máme

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\left(\sigma_t - \frac{\sigma_t + \sigma_r}{2}\right)^2 + \left(\sigma_r - \frac{\sigma_t + \sigma_r}{2}\right)^2 + (\sigma_r - \sigma_t)^2} = \sigma_k$$

a

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sigma_t - \sigma_r) \sqrt{\frac{1}{2} + 1} = \sigma_k,$$

tedy

$$\sigma_t - \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_k \doteq 1,155\sigma_k.$$

Obě podmínky plasticity lze tedy v naší úloze vyjádřit jedinou rovnicí

$$\sigma_t - \sigma_r = \alpha\sigma_k, \quad (1.14)$$

kde $\alpha = 1$, nebo $\alpha = 1,155$.

Při čistě plastickém stavu je podmínka (1.14) splněna v celém průřezu trubky. Po dosazení do rovnice (1.12) máme

$$\alpha\sigma_k = x \frac{d\sigma_r}{dx},$$

odkud integrací obdržíme

$$\alpha\sigma_k \ln x + C = \sigma_r.$$

Okrajové podmínky pro vnitřní a vnější poloměr jsou

$$x = r_1 : \quad \sigma_r = -p_1,$$

$$x = r_2 : \quad \sigma_r = -p_2.$$

Z první z nich

$$C = -p_1 - \alpha\sigma_k \ln r_1$$

a tedy

$$\sigma_r = -p_1 + \alpha\sigma_k \ln \frac{x}{r_1}. \quad (1.15)$$

Z druhé pak

$$-p_2 = -p_1 + \alpha\sigma_k \ln \frac{r_2}{r_1},$$

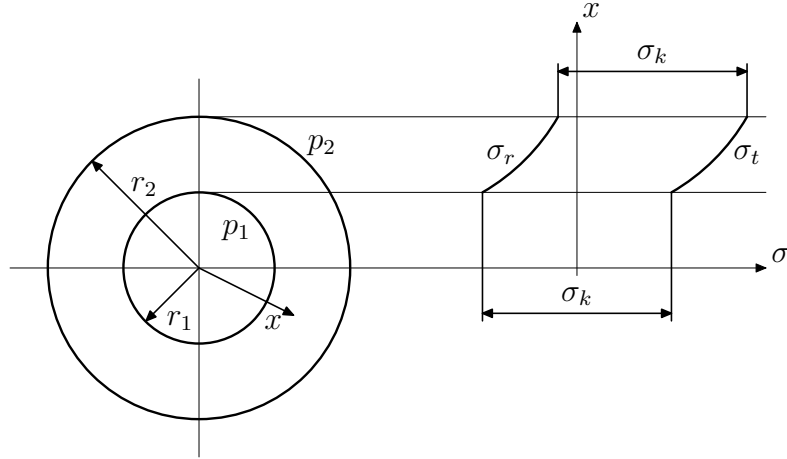
odkud plyne vztah pro přetlak plně plastizující danou nádobu

$$p_1 - p_2 = \alpha\sigma_k \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (1.16)$$

Z rovnic (1.14) a (1.15) dostáváme výraz pro výpočet tečného napětí

$$\sigma_t = -p_1 + \alpha \sigma_k \left(1 + \ln \frac{x}{r_1} \right). \quad (1.17)$$

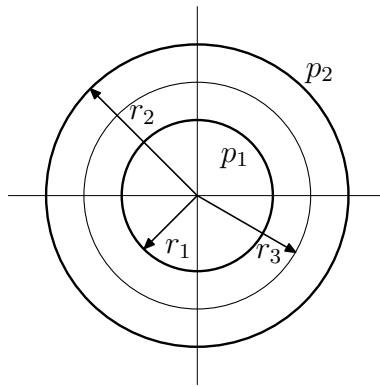
Grafické znázornění průběhů právě vyjádřených napětí je na obrázku 1.17.



Obrázek 1.17: Silnostěnná nádoba

1.8 Silnostěnná nádoba v pružně-plastickém stavu

Silnostěnná nádoba je nejvíce namáhána od svého vnitřního poloměru. Nádoba tak začne plastizovat zevnitř. Označíme jako r_3 vnější poloměr plastické oblasti, tedy i vnitřní poloměr oblasti elastické (obrázek 1.18). Jak víme z kapitoly zabývající se elastickým



Obrázek 1.18: Silnostěnná nádoba

namáháním silnostěnných nádob, v elastické části platí, při označení $p_3 = -\sigma_{r3}$,

$$p_3 - p_2 = \frac{\sigma_k}{2} \left(1 - \frac{r_3^2}{r_2^2} \right).$$

V plastické části pak dle (1.16)

$$p_1 - p_3 = \sigma_k \ln \frac{r_3}{r_1}.$$

Sečtením posledních dvou vztahů dostáváme

$$p_1 - p_2 = \frac{\sigma_k}{2} \left(2 \ln \frac{r_3}{r_1} + 1 - \frac{r_3^2}{r_2^2} \right).$$

1.9 Rotující kotouč stálé tloušťky v čistě plastickém stavu

Podle kapitoly zabývající se elastickou analýzou rotujících kotoučů máme rovnici rovnováhy elementu

$$(x\sigma_r)' - \sigma_t + \rho\omega^2 x^2 = 0. \quad (1.18)$$

V případě rotujícího kotouče platí pro hodnoty hlavních napětí

$$\sigma_t \geq \sigma_r \geq \sigma_o = 0.$$

Saint-Venantova podmínka plasticity má proto tvar

$$\sigma_t - \sigma_o = \sigma_k$$

čili

$$\sigma_t = \sigma_k.$$

Z (1.18) tedy

$$x\sigma_r = x\sigma_k - \frac{\rho\omega^2}{3}x^3 + C.$$

Pro volný kotouč

$$\sigma_{r1} = 0 : \quad r_1\sigma_k - \frac{\rho\omega^2}{3}r_1^3 + C = 0$$

a

$$C = \frac{\rho\omega^2}{3}r_1^3 - r_1\sigma_k.$$

Pak

$$\sigma_r = \frac{1}{x} \left(\sigma_k(x - r_1) - \frac{\rho\omega^2}{3}(x^3 - r_1^3) \right).$$

Použijeme-li druhou okrajovou podmínku dostáváme úhlovou rychlost ω , pro kterou nastává plná plastizace celého kotouče:

$$\sigma_{r2} = 0 : \quad \frac{1}{r_2} \left(\sigma_k(r_2 - r_1) - \frac{\rho\omega^2}{3}(r_2^3 - r_1^3) \right) = 0,$$

tedy

$$\omega = \sqrt{\frac{3\sigma_k}{\rho(r_2^2 + r_1^2 + r_1r_2)}}.$$

Průběh radiálního napětí je pak

$$\sigma_r = \sigma_k \frac{x - r_1}{x} \left(1 - \frac{x^2 + xr_1 + r_1^2}{r_2^2 + r_1r_2 + r_1^2} \right).$$

Obsah

1	Základy teorie plasticity	1
1.1	Úvod	1
1.2	Pracovní diagram	2
1.3	Přímé pruty a prutové soustavy namáhané tahem	3
1.3.1	Zbytková napětí	7
1.3.2	Zbytkové posuvy sloupku	8
1.4	Ohyb při ideální plasticitě	9
1.4.1	Zbytková napětí	10
1.4.2	Příklad	10
1.4.3	Příklad	12
1.5	Podmínky plasticity při víceosé napjatosti	13
1.5.1	Podmínka Saint-Venantova	13
1.5.2	Podmínka Huber-Hencky-Misesova (HMH)	13
1.6	Krut prutu kruhového průřezu	14
1.7	Plastická napjatost silnostěnné nádoby	15
1.8	Silnostěnná nádoba v pružně-plastickém stavu	17
1.9	Rotující kotouč stálé tloušťky v čistě plastickém stavu	18