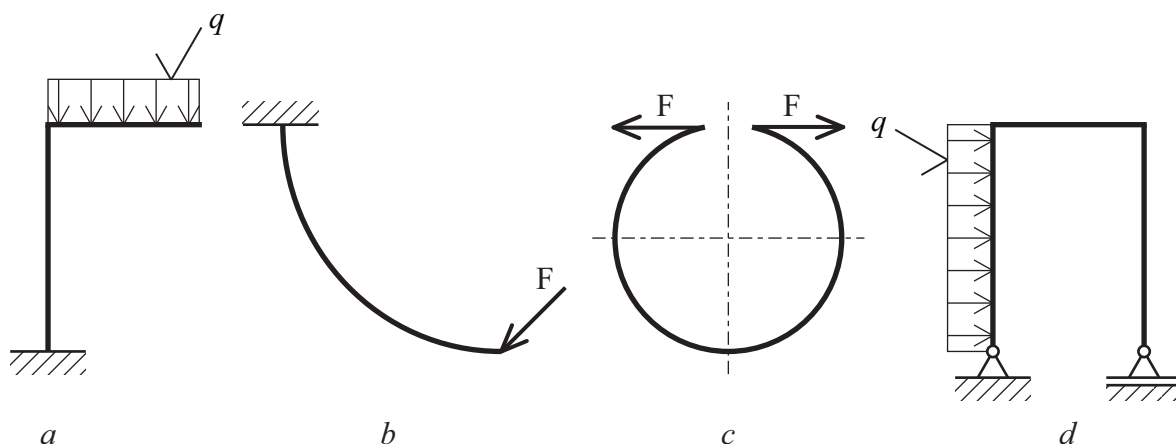


Kapitola 1

Křivé pruty

1.1 Úvod

Zakřivené elementy konstrukcí, u kterých, stejně jako u přímých prutů, převládá jeden rozměr, se nazývají **křivými pruty**. Mohou být staticky určité (obr. 1.1 a, b, c, d), nebo staticky neurčité (obr. 1.2 a, b, c, d). Pruty na obr. 1.2 a, b jsou staticky neurčité

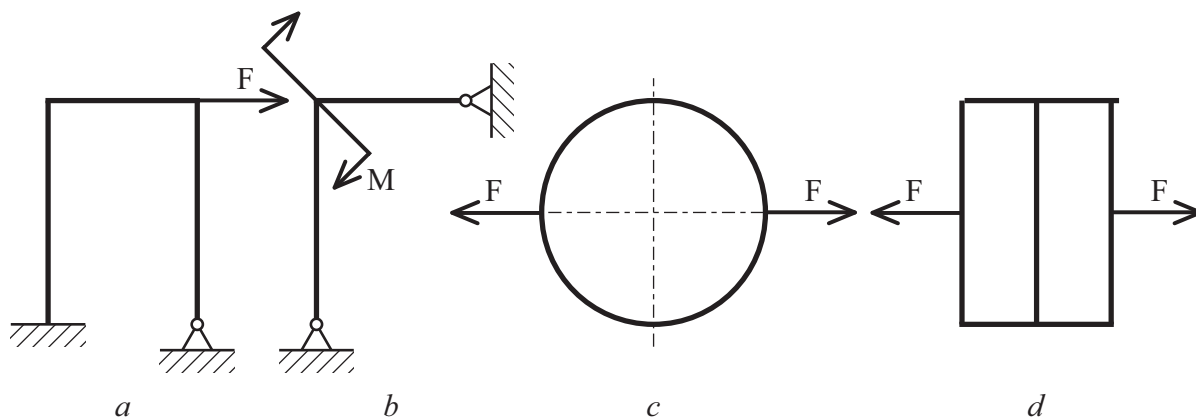


Obrázek 1.1:

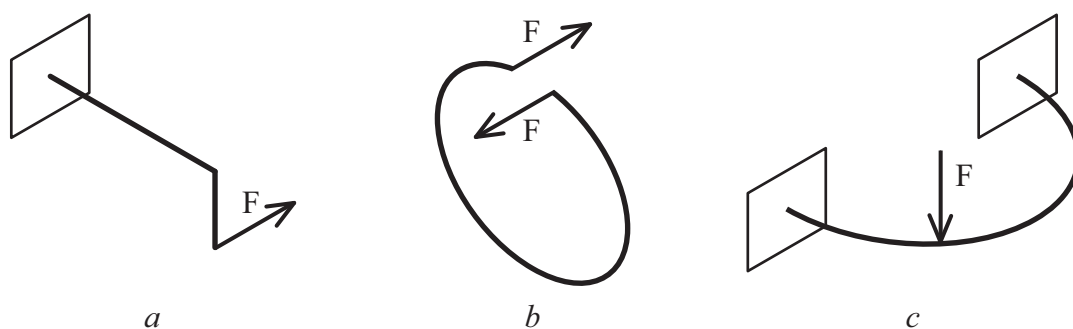
v důsledku uložení konců, pruty na obr. 1.2 c, d jsou staticky neurčité vnitřně – jsou to **rámové konstrukce**. Podle způsobu zakřivení a zatížení mohou křivé pruty být **rovinné** (obr. 1.1 a 1.2), nebo **prostorové** (obr. 1.3). U rovinných křivých prutů leží střednice společně s působícími silami ve stejné rovině, na obr. 1.1 a 1.2 v rovině nákresny. Významnou charakteristikou křivých prutů je jejich **zakřivení** definované poměrem r_T/h viz obr. 1.4. Jestliže tento poměr splňuje podmínku

$$\frac{r_T}{h} \geq 6,$$

můžeme předpokládat, že normálová napětí od ohybu jsou v příčném průřezu rozdělena lineárně, dle stejného předpokladu jako u tenkých přímých prutů. Tyto pruty nazýváme **tenkými křivými pruty**. Při poměru $r_T/h < 6$ se jedná o **pruty silně zakřivené**. U těchto prutů je průběh normálových napětí od ohybu nelineární. Ačkoliv se budeme



Obrázek 1.2:



Obrázek 1.3:

v celé kapitole zabývat tenkými křivými pruty, uvedeme pro informaci v úvodu zjednodušený postup výpočtu rozdělení ohybových napětí v průřezu silně zakřiveného prutu. Uvažujme silně zakřivený rovinný prut s jednou osou symetrie průřezu v rovině ohybu (obr. 1.4), zatížený pouze dvojicemi M_o .

Řešení je založeno na předpokladu, že průřezy prutu zůstanou rovinné i po zatížení. Uvažujme element křivého prutu určený dvěma radiálními řezy pootočenými o úhel $d\alpha$ kolem středu křivosti střednice S , přičemž r_T označuje poloměr křivosti křivky spojující těžiště, R poloměr křivosti neutrální osy a r poloměr křivosti obecného místa.

V důsledku nelineárního průběhu osových napětí od ohybu očekáváme polohu neutrální osy mimo těžiště průřezu. Její poloměr křivosti označíme R . Ohybový účinek dvojic M_o vyvolá změnu úhlu $d\alpha$ o hodnotu $\Delta d\alpha$ (přímka ab). Vlákno ve vzdálenosti y od posunuté neutrální osy se z původní délky $r \cdot d\alpha = \widehat{cd}$ prodlouží o délku \widehat{dg}

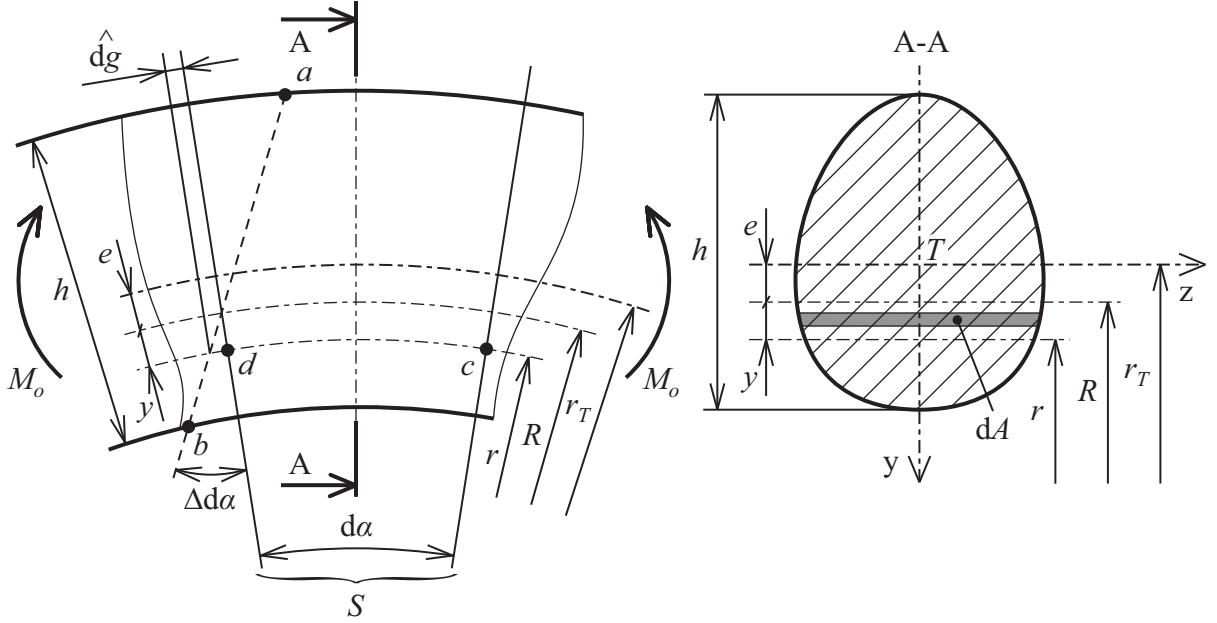
$$y \cdot \Delta d\alpha = (R - r) \cdot \Delta d\alpha. \quad (1.1)$$

Normálová napětí v elementu průřezu \widehat{dA} určíme z rovnice, kde ε vyjádříme jako poměr velikosti prodloužení k původní délce prutu

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{(R - r) \cdot \Delta d\alpha}{r \cdot d\alpha}. \quad (1.2)$$

Upravme tuto rovnici na tvar

$$\frac{\sigma \cdot r}{R - r} = E \cdot \frac{\Delta d\alpha}{d\alpha} = \text{konst.}, \quad (1.3)$$



Obrázek 1.4:

kteřý napovídá, že pro určitý řez je uvedený poměr konstantní.

Poloha neutrální osy vyplývá z podmínky, že součet vnitřních sil kolmých k průřezu je roven nule

$$\sum N = 0,$$

t.j.

$$\int_A \sigma \cdot dA = \int_A E \cdot \frac{(R-r) \cdot \Delta d\alpha}{r \cdot d\alpha} \cdot dA = 0. \quad (1.4)$$

V důsledku platnosti rovnice (1.3) můžeme podmínku (1.4) upravit následovně

$$E \cdot \frac{\Delta d\alpha}{d\alpha} \cdot \int_A \frac{R-r}{r} \cdot dA = E \cdot \frac{\Delta d\alpha}{d\alpha} \cdot \left(R \cdot \int_A \frac{dA}{r} - \int_A dA \right) = 0, \quad (1.5)$$

odkud pro poloměr R určující polohu neutrální osy plyne

$$R = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}}. \quad (1.6)$$

Poloha neutrální osy se neshoduje s polohou střednice průřezu r_t , jak je tomu u přímých prutů.

Dalším krokem bude stanovení průběhu normálových napětí v průřezu křivého prutu od ohybu. Z podmínky rovnováhy momentů vnějších a vnitřních sil plyne

$$M_o = \int_A \sigma \cdot \underbrace{(R-r)}_y \cdot dA = \int_A E \cdot \frac{(R-r)^2 \cdot \Delta d\alpha}{r \cdot d\alpha} \cdot dA. \quad (1.7)$$

S ohledem na rov. (1.3) obdržíme vztah

$$M_o = E \cdot \frac{\Delta d\alpha}{d\alpha} \int_A \frac{(R-r)^2}{r} \cdot dA = \frac{\sigma \cdot r}{R-r} \cdot \int_A \frac{(R-r)^2}{r} \cdot dA,$$

který upravíme následovně

$$M_o = \frac{\sigma \cdot r}{R-r} \left[R^2 \cdot \int_A \frac{dA}{r} - R \cdot \int_A dA - R \int_A dA + \int_A r \cdot dA \right]. \quad (1.8)$$

První dva členy v závorce, podle rov. (1.5), jsou rovny nule. Třetí integrál je roven obsahu průřezu A a čtvrtý definuje lineární (statický) moment průřezu k ose procházející středem křivosti S .

$$\int_A r \cdot dA = r_T \cdot A. \quad (1.9)$$

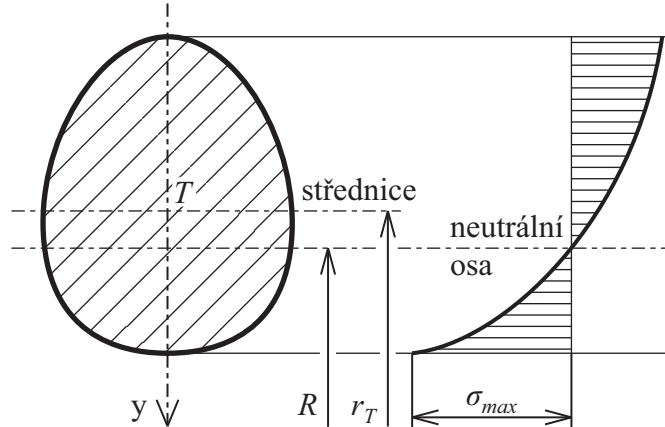
Rovnice (1.8) pak bude mít tvar

$$M_o = \frac{\sigma \cdot r}{R-r} \cdot (r_T - R) \cdot A. \quad (1.10)$$

Jestliže kladný směr osy y směřuje ke středu křivosti S , pak posunutí neutrální osy vyjádříme vztahem

$$e = r_T - R.$$

Z rovnice (1.10) odvodíme vztah pro napětí



Obrázek 1.5:

$$\sigma = M_o \cdot \frac{R-r}{r \cdot A \cdot (r_T - R)}, \quad \text{kde} \quad y = R - r$$

t.j.

$$\sigma = \frac{M_o}{A \cdot e} \cdot \frac{y}{R-y}. \quad (1.11)$$

Rovnice (1.11) definuje hyperbolický průběh napětí (obr. 1.5) v průřezu silně zakřiveného prutu (jeřábový hák). Maximální napětí je ve vnitřním vlákne, směrem ke středu křivosti. Napjatost v průřezu silně zakřiveného prutu je složitější a vyskytuje se zde i napětí radiální [4], [5].

1.2 Tenké křivé pruty

Tenké křivé pruty mají malou křivost $\kappa = \frac{1}{r_T}$. T.j. $r \gg (R - r) = y$, ve vztahu 1.4 tedy můžeme r uvažovat za konstantní v porovnání s $y = R - r$ a psát

$$\int_A E \cdot \frac{R - r}{r} \cdot \frac{\Delta d\alpha}{d\alpha} \cdot dA = \frac{E}{r} \cdot \frac{\Delta d\alpha}{d\alpha} \cdot \int_A y \cdot dA = 0. \quad (1.12)$$

Ze vztahu 1.12 plyne, že neutrální osa prochází těžištěm průřezu.

Podobně upravíme vztah 1.7

$$M_o = \int_A E \cdot \frac{(R - r)^2}{r} \cdot \frac{\Delta d\alpha}{d\alpha} \cdot dA = \frac{E}{r} \cdot \frac{\Delta d\alpha}{d\alpha} \cdot \int_A y^2 \cdot dA = \frac{E}{r} \cdot \frac{\Delta d\alpha}{d\alpha} \cdot J_z. \quad (1.13)$$

Použijeme-li tento výsledek ve vztahu 1.2, dostáváme pro tenké křivé pruty vyjádření napětí ve tvaru

$$\sigma = \frac{M_o}{J_z} \cdot y, \quad (1.14)$$

což je výsledek shodný s vyjádřením velikosti napětí pro přímé tenké pruty.

1.3 Průběhy posouvajících sil a ohybových momentů u křivých prutů

Průběhy posouvajících sil a ohybových momentů u křivých prutů určujeme pomocí závislostí daných Schwedlerovou větou nebo metodou řezu. Vzhledem k zakřivení prutů vyvolává vnější zatížení v řezech kolmých k ose prutu i normálovou složku vnitřní síly. Vliv normálové síly na celkové namáhání a deformacemi prutu uvedeme dále.

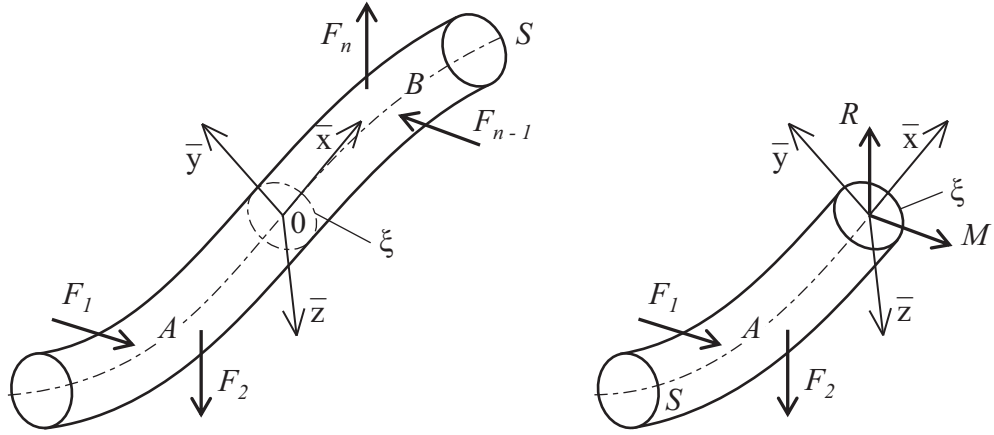
V obecném případě je střednice křivého prutu orientována prostorově (obr. 1.6) a vnější síly mohou působit zcela libovolně. Vnitřní síly v určitém řezu ξ , kolmém ke střednici S , určíme metodou řezu. Jak již víme, spočívá tento postup ve stanovení statických podmínek rovnováhy mezi zatížením jedné části prutu (části A nebo B) a vnitřními silovými účinky působícími v řezu ξ . Účinek vnější části prutu (B) na jeho levou část (A) nahradíme výslednou silou \mathbf{R} a dvojicí \mathbf{M} v průřezu určeném rovinou ξ . Složky vektorů \mathbf{R} a \mathbf{M} v lokálním systému $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ jsou

$$\{\mathbf{R}\} = \{R_{\bar{x}}, R_{\bar{y}}, R_{\bar{z}}\}^T \quad \text{a} \quad \{\mathbf{M}\} = \{M_{\bar{x}}, M_{\bar{y}}, M_{\bar{z}}\}^T. \quad (1.15)$$

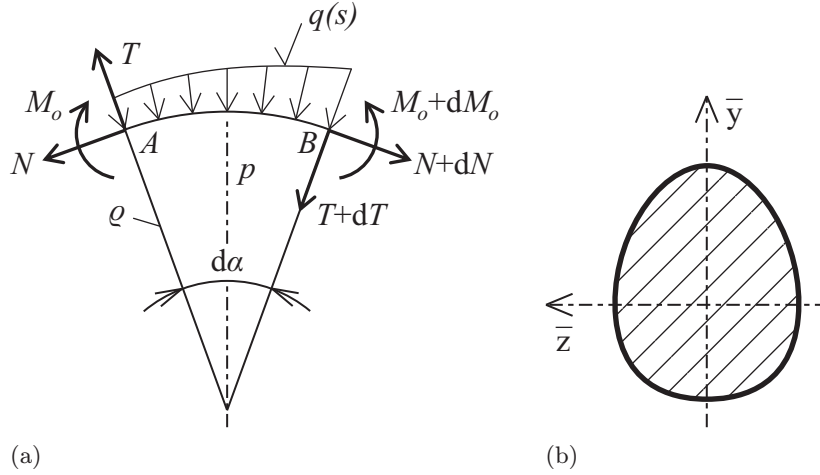
Složky $R_{\bar{y}}$ a $R_{\bar{z}}$ namáhají prut v uvažovaném řezu ve smyku, složka $R_{\bar{x}}$ v tahu nebo tlaku. Složky výsledné dvojice $M_{\bar{y}}$ a $M_{\bar{z}}$ namáhají prut v ohybu a složka $M_{\bar{x}}$, která je kolmá k řezu ξ , namáhá zde v uvažovaném řezu prut krutem.

Pro větší názornost uvažujme při odvození vztahů mezi vnitřními silami rovinný případ – prut leží v rovině nákresny, průřez má jednu osu symetrie (obr. 1.7). V rovině symetrie působí i zatěžující síly. Rovina symetrie je tedy i rovinou ohybu. Dvěma řezy, pootočenými vzájemně o úhel $d\alpha$ (obr. 1.7(a)), vytkneme z prutu element o délce ds příčměž

$$ds = \rho \cdot d\alpha,$$



Obrázek 1.6:



Obrázek 1.7:

kde ρ je poloměr křivosti střednice prutu. Spojité zatížení $q(s)$ elementu má rozměr v N/m. V levém i pravém řezu nahradíme účinky odstraněných částí prutu odpovídajícími složkami T , N a dvojcí M_o , resp. silami $T + dT$ a $N + dN$ a dvojcí $M_o + dM_o$.

Podmínky rovnováhy sil působících na element ve směru kolmém k přímce p , dále ve směru přímky p a součet momentů sil k bodu B mají tvar

$$\begin{aligned}
 & [N - (N + dN)] \cdot \cos \frac{d\alpha}{2} + [T + (T + dT)] \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} = 0, \\
 & [N + (N + dN)] \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} + [(T + dT) - T] \cdot \cos \frac{d\alpha}{2} + \\
 & \quad + \underbrace{q(s) \cdot \rho \cdot d\alpha}_{ds} = 0, \\
 & M_o - (M_o + dM_o) - N \cdot \rho \cdot [1 - \cos(d\alpha)] + T \cdot \rho \cdot \sin(d\alpha) - \\
 & \quad - q(s) \cdot \rho \cdot d\alpha \cdot \rho \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} = 0.
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Pro středový úhel platí $d\alpha \rightarrow 0$, a tudíž funkce $\cos(d\alpha/2) \approx 1$ a $\sin(d\alpha/2) \approx d\alpha/2$.

Rovnice 1.17 upravíme a dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{dN}{d\alpha} - T &= 0, \\ N \cdot d\alpha + dT + q(s) \cdot \varrho \cdot d\alpha &= 0, \\ dM_o - T \cdot \varrho \cdot d\alpha &= 0.\end{aligned}$$

Dosadíme-li do těchto vztahů $\varrho \cdot d\alpha = ds$, získáme diferenciální závislosti mezi N , T a M_o v konečném tvaru

$$\begin{aligned}\frac{dN}{ds} &= \frac{T}{\varrho}, \\ \frac{dT}{ds} &= -\frac{N}{\varrho} - q(s), \\ \frac{dM_o}{ds} &= T.\end{aligned}\tag{1.17}$$

Srovnáme-li tyto rovnice (za předpokladu $\varrho = \infty$ a $ds = dx$) s rovnicemi [1] : (93), (96) a (98), zjistíme shodu se Schwedlerovou větou, platnou pro přímý nosník.

Použití rovnic (1.18), které vyjadřují analytickou závislost mezi veličinami q , N , T a M_o pro křivé pruty, analogicky jako Schwedlerova věta pro q , T a M_o přímých nosníků, uvedeme v následující staticky určité úloze naznačené na obr. ???. Střednice prutu je tvořena obloukem kružnice.

Nejdříve určíme v obecném řezu ξ , mezi řezy 0 a 1 , normálovou sílu N jako průmět všech vnějších sil působících na prut po jedné straně řezu ξ do směru tečny t

$$N = F \sin \varphi.$$

Průběh síly N podél střednice je naznačen na obr. ??b. Nyní pomocí

$$\frac{dT}{ds} = -\frac{N}{\varrho} - q(s)$$

určíme funkci T , tedy

$$\frac{dT}{ds} = -\frac{N}{r}, \quad \text{pro } \varrho = r = \frac{ds}{d\varphi}, \quad q(s) = 0,$$

odkud po integraci plyne

$$T = F \cdot \cos \varphi + C.$$

Pro $\varphi = \pi/2$ je $T = 0$, a tudíž $C = 0$. Posouvající sílu tedy určíme z rovnice

$$T = F \cdot \cos \varphi.$$

Průběh této funkce je uveden na obr. ??c. Pro určení ohybového momentu použijeme rovnici

$$\frac{dM_o}{ds} = T = F \cdot \cos \varphi,$$

odkud po integraci plyne

$$M_o = F \cdot r \cdot \sin \varphi + D.$$

Integrační konstantu D určíme pro řez θ , kde $\varphi = 0$ a odkud vyplývá $M_o(0) = 0 = D$. Pro průběh M_o (obr. ??d) platí tudíž vztah

$$M_o = F \cdot r \cdot \sin \varphi.$$

Znaménka funkcí $N(\varphi)$, $T(\varphi)$, $M_o(\varphi)$ vyplývají z postupu při odvozování rov. (1.18).

Uvedený analytický postup určování funkcí N , T a M_o při řešení konkrétních úloh převážně nahrazujeme metodou řezů, kterou budeme užívat většinou i v dalším výkladu a kterou jsme používali při řešení přímých nosníků.

Na obrázku ?? je naznačena staticky určitá konstrukce, která se skládá jen z přímých částí a je uložena ve dvou podporách stejným způsobem, jako ukládáme přímé pruty. Úlohou je stanovit průběhy N , T a M_o od spojitěho zatížení q_o . V podpoře θ vzniká od spojitěho zatížení jen vertikální reakce

$$R_A = q_o \cdot \frac{a}{2},$$

která je určena ze statické podmínky. Funkce N , T a M_o stanovíme metodou řezu v jednotlivých polích. Začneme v poli 01 od volného konce θ (proto stačí k řešení úlohy znalost reakce R_A). Normálová síla v poli 01 je

$$N = -R_A = -q_o \cdot \frac{a}{2}$$

a posouvající síla, resp. ohybový moment

$$T = 0, \quad M_o = 0.$$

V druhém poli 12 je normálová síla $N = 0$. Pro posouvající sílu v libovolném místě pole 12 plyne

$$T = -R_A + q_o \cdot x = q_o \cdot x \cdot \left[1 - \frac{a}{2x}\right]$$

a pro ohybový moment

$$M_o = R_A \cdot x - q_o \cdot \frac{x^2}{2} = q_o \cdot \frac{x \cdot a}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Průběhy N , T a M_o v poli 23 jsou stejné jako v části 01 (symetrie). Průběhy hledaných funkcí v jednotlivých polích jsou naznačeny na obr. ??b,c,d.

Na obrázku ?? je uveden vetknutý křivý prut s kombinací přímé a zakřivené části. Vzhledem ke způsobu zatížení a tvaru střednice budeme určovat funkce N , T a M_o samostatně v poli 01 a 12 . V prvním poli 01 je

$$N = 0, \quad T = q_o \cdot x, \quad M_o = -q_o \cdot \frac{x^2}{2}.$$

Průběhy jsou naznačeny na obr. ??b,c,d. V druhém poli 12 , v obecném řezu označeném ξ , jsou výsledné účinky vnějších sil rovny

$$N = -q_o \cdot a \cdot \sin \varphi, \quad T = q_o \cdot a \cdot \cos \varphi,$$

$$M_o = -q_o \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \left[1 + 2 \cdot \frac{r}{a} \cdot \sin \varphi\right].$$

Průběhy N , T a M_o v poli 12 jsou opět uvedeny na obr. ??b,c,d.

Při aplikaci metody řezů dodržujeme důsledně zvolený systém znamének v průběhu řešení celé úlohy. V technické praxi se při řešení tenkých křivých prutů zpravidla určují jen ohybové účinky. Vliv N a T na namáhání a přetvoření tenkých prutů se s ohledem na jejich účinek zanedbává.

1.4 Vliv osových a posouvajících sil při rovinném ohybu křivých prutů

S výjimkou případu prostého ohybu je ohybové namáhání křivých prutů téměř vždy v obecném řezu kombinováno s účinkem normálové a posouvající síly. Normálová síla N vyvolává v každém bodě průřezu normálové napětí

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Napětí od normálové síly jsou v průřezu rozložena rovnoměrně a výslednice vnitřních sil prochází těžištěm průřezu. Výsledné normálové napětí v libovolném bodě průřezu je dáno součtem normálových napětí od ohybového momentu M_o (1.11) a osově síly N

$$\sigma = \frac{M_o}{A \cdot e} \cdot \frac{y}{R - y} + \frac{N}{A}.$$

Při uvažování Hookeova zákona

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

rovnice (1.6) a $r = R - y$, pak vyjádříme deformační energii u **tlustých** křivých prutů při prostém ohybu takto

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \cdot \int_V \sigma \cdot \varepsilon \cdot dV = \frac{1}{2 \cdot E} \int_s \int_A \left(\frac{M_o}{A \cdot e} \cdot \frac{y}{R - y} + \frac{N}{A} \right)^2 \cdot d\bar{A} \cdot ds = \\ &= \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \int_s \left(\int_A \frac{M_o^2}{A^2 \cdot e^2} \cdot \frac{y^2}{(R - y)^2} \cdot d\bar{A} + 2 \cdot \frac{M_o \cdot N}{A^2 \cdot e} \cdot \underbrace{\int_A \frac{y}{R - y} \cdot d\bar{A}}_{=0, \text{viz 1.5}} + \frac{N^2}{A} \right) \cdot ds \\ \text{Pozn. } \int_A \frac{y}{R - y} \cdot d\bar{A} &= \int_A \frac{R - r}{r} \cdot d\bar{A} = 0 \quad (1.18) \end{aligned}$$

U tenkých křivých prutů uvažujeme následovně. Při vyjádření normálového napětí opět vycházíme ze vztahu

$$\sigma = \frac{M_o}{A \cdot e} \cdot \frac{y}{R - y} + \frac{N}{A},$$

respektive u tenkých křivých prutů

$$\sigma = \frac{M_o}{J} \cdot y + \frac{N}{A}.$$

Bereme-li dále v úvahu Hookeův zákon

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

pak určíme deformační energii napjatosti elementu při prostém ohybu u **tenkých** křivých prutů ze vztahu

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \cdot \int_V \sigma \cdot \varepsilon \cdot dV = \frac{1}{2 \cdot E} \int_s \int_A \left(\frac{M_o}{J} \cdot y + \frac{N}{A} \right)^2 \cdot d\bar{A} \cdot ds = \\ &= \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \int_s \left(\frac{M_o^2 \cdot J}{J^2} + 2 \cdot \frac{M_o \cdot N}{J \cdot A} \cdot \underbrace{\int_A y \cdot d\bar{A}}_{=0, \text{viz 1.5}} + \frac{N^2}{A} \right) \cdot ds \quad (1.19) \end{aligned}$$

Deformační energie elementu (obr. 1.7) od posouvající síly T je určena vztahem

$$dU_T = \frac{\beta}{2 \cdot G \cdot A} \cdot T^2 \cdot ds \quad (1.20)$$

Úhrnná deformační energie prutu o délce l se určí součtem deformačních prací elementů

$$\begin{aligned} U &= U_{M_o} + U_N + U_T = \\ &= \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \int_{(l)} \frac{M_o^2}{A \cdot \varrho} \cdot \frac{ds}{e} + \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \int_{(l)} \frac{N^2}{A} \cdot ds + \frac{\beta}{2 \cdot G} \cdot \int_{(l)} \frac{T^2}{A} \cdot ds \quad (1.21) \end{aligned}$$

Pro tenké křivé pruty (rov. 1.16) vztah (1.21) upravíme na tvar

$$U = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \int_{(l)} \frac{M_o^2}{J} \cdot ds + \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \int_{(l)} \frac{N^2}{A} \cdot ds + \frac{\beta}{2 \cdot G} \cdot \int_{(l)} \frac{T^2}{A} \cdot ds \quad (1.22)$$

Při stanovení přetvoření tenkých křivých prutů pomocí deformační energie se obvykle zanedbávají poslední dva členy rov. (1.22), a to vzhledem k jejich malému vlivu na celkovou hodnotu deformace, která je určena převážně účinkem ohybových momentů. Pak pro energii elementu plyne

$$dU_{M_o} = \lambda_{M_o} \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{E} \cdot dV = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \frac{M_o^2(s)}{J_z^2(s)} \cdot y^2 \cdot dA \cdot ds,$$

kde

$$\sigma = \frac{M_o(s)}{J_z(s)} \cdot y \quad ; \quad dV = dA \cdot ds,$$

takže celková energie tenkého křivého prutu od ohybových momentů je dána vztahem

$$U_{M_o} = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \int_{(l)} \frac{M_o^2(s)}{J_z(s)} \cdot ds, \quad (1.23)$$

jelikož

$$\int_{A(s)} y^2 \cdot dA = J_z(s).$$

Jak malý je vliv normálové a posouvající síly na výslednou deformaci tenkého křivého prutu, uvedeme na následujícím příkladu. Na obr. ?? je naznačen vetknutý křivý prut, zatížený silou F . Stanovíme velikost průhybu v_F pod silou F . EJ prutu je konstantní. Průřez prutu je obdélníkový. V obecném místě pole Ol , t.j. v řezu ξ , je velikost ohybového momentu $M_o(s)$, normálové síly $N(s)$ a posouvající síly $T(s)$ následující

$$M_o(s) = F \cdot r \cdot \sin \alpha \quad ; \quad N(s) = F \cdot \sin \alpha \quad ; \quad T(s) = F \cdot \cos \alpha.$$

Poznámka: V dosavadních úvahách jsme jako kladný moment uvažovali ten, která natahuje spodní vlákno. To je však u křivých prutů problematický pojem. Dohodněme se proto, že v dalších úvahách budeme za kladný moment považovat ten, který se prut snaží zabalit (snaží se zvětšit jeho křivost).

Celkovou deformační energii určíme podle rov. (1.22)

$$U_{\Sigma} = \frac{1}{2 \cdot E \cdot J} \cdot \int_0^{\pi/2} F^2 \cdot r^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot r \cdot d\alpha + \frac{1}{2 \cdot E \cdot A} \cdot \int_0^{\pi/2} F^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot r \cdot d\alpha + \\ + \frac{\beta}{2 \cdot G \cdot A} \cdot \int_0^{\pi/2} F^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot r \cdot d\alpha \cdot$$

Po integraci upravíme rovnici tak, aby první člen v závorce reprezentoval vliv ohybu, ostatní členy vliv osové a posouvající síly

$$U_{\Sigma} = \frac{\pi}{8 \cdot E \cdot J} \cdot F^2 \cdot r^3 \left[1 + \frac{J}{A \cdot r^2} + 1,2 \cdot \frac{E \cdot J}{G \cdot A \cdot r^2} \right] \cdot$$

Zvolíme-li $r/h = 6$ a $E/G = 2,6$, bude

$$U_{\Sigma} = \frac{\pi}{8 \cdot E \cdot J} \cdot F^2 \cdot r^3 \cdot [1 + 0,014] \cdot$$

Průhyb v_F určíme pomocí Castiglianovy věty

$$v_F = \frac{\partial U_{\Sigma}}{\partial F} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{F \cdot r^3}{E \cdot J} [1 + 0,014] \cdot \quad (1.24)$$

Z uvedené rovnice je patrné, že vliv normálové a posouvající síly, při zvoleném mezním poměru $r/h = 6$, je oproti účinku ohybu nepatrný a deformaci vzniklou od ohybového účinku zvětšuje jen o 1,4%.

1.5 Deformace střednice tenkých křivých prutů

Vliv osových a posouvajících sil na přetvoření křivých rovinných prutů vyplývá z rovnice (1.22). Prostorové křivé pruty jsou namáhány i krutem. Celkovou deformační energii při současném působení ohybu, tahu, smyku a také krutu určíme rozšířením rov. (1.22)

$$U = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \int_{(l)} \frac{M_o^2(s)}{J(s)} \cdot ds + \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \int_{(l)} \frac{N^2(s)}{A(s)} \cdot ds + \\ + \frac{\beta}{2 \cdot G} \cdot \int_{(l)} \frac{T^2(s)}{A(s)} \cdot ds + \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \int_{(l)} \frac{M_k^2(s)}{J_k(s)} \cdot ds \cdot \quad (1.25)$$

Mají-li vektory M_o a T v rovině řezu $(0, y, z)$ (obr. 1.7) obecnou polohu, zapíší se odpovídající členy v rov. (1.25) ve složkách y a z . Celková délka křivého prutu je (l) .

Při určování přetvoření tenkých křivých prutů je ohybový účinek rovněž dominantní viz rov. (1.24). Z rovnice (1.25) se používá obvykle jen první člen, nejsou-li důvody pro uplatnění ostatních.

Deformační energie od ohybu je funkcí silových účinků působících na křivý prut

$$U = U(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n). \quad (1.26)$$

Pomocí Castiglianovy věty odvodíme Mohrův integrál pro zobecněný posuv střednice

$$u_i = \frac{\partial U}{\partial F_i} = \frac{1}{E} \cdot \int_{(l)} \frac{M_o(s)}{J(s)} \cdot \frac{\partial M_o(s)}{\partial F_i} \cdot ds = \frac{1}{E} \cdot \int_{(l)} \frac{M_o(s)}{J(s)} \cdot m_{oi}(s) \cdot ds, \quad (1.27)$$

kde $M_o(s) = M_o(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n)$; $F_i \rightarrow 0$, ale $F_i \neq 0$; $m_{oi}(s)$ je ohybový moment od jednotkového účinku „1“, který působí v místě a ve směru hledaného zobecněného posuvu u_i .

Srovnáme-li rov. (1.27) s obdobnou rovnicí [1], (234, rov. 10.18) pro deformace přímých nosníků, můžeme konstatovat jejich totožnost. Z této shody vyplývají i stejné postupy a podmínky pro určování přetvoření tenkých křivých prutů. Tak např. vzhledem k tomu, že $M_o(s)$ a $m_{oi}(s)$ jsou funkcemi odlehlosti s , lze použít pro vyjádření Mohrova integrálu graficko-analytickou metodu jednotkového silového účinku (Vereščagin):

$$u_i = \frac{1}{E} \cdot \int_{(l)} \frac{M_o(s)}{J(s)} \cdot m_{oi}(s) \cdot ds = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^n \frac{1}{J} \cdot A_{Mi} \cdot m_{oTi}, \quad (1.28)$$

kde sumace i veličiny A_{Mi} , $m_{oi}(s)$ a m_{oTi} mají stejný význam jako u přímých nosníků [1],(238). S výhodou lze použít Vereščaginovu metodu u lomených prutů, které se skládají jen z přímých částí.

Příklad 1.1:

Tenký prizmatický prut, jehož střednice má tvar oblouku kružnice (obr. ??), je zatížen silou F . Úkolem je určit úhel natočení φ_F střednice prutu v místě působíště síly F . Pomocí Mohrova integrálu

$$u_F = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \int_{(l)} M_o(s) \cdot m_{oF}(s) \cdot ds,$$

kde

$M_o(s) = F \cdot x = F \cdot r \cdot \sin \varphi \dots$	je ohybový moment v řezu ξ ($\xi(x, y)$ je obecné místo v poli $O1$),
$m_{oF}(s) = 1 \dots \dots \dots$	je ohybový moment v témže řezu od jednotkové dvojice (obr. ??b),
$ds = r \cdot d\varphi \dots \dots \dots$	element délky střednice prutu,
$0 \leq \varphi \leq \pi/2 \dots \dots \dots$	interval integrační proměnné.

Po úpravě je úhel natočení křivého prutu v místě působení síly F

$$\varphi_F = \frac{F \cdot r^2}{E \cdot J} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cdot d\varphi = \frac{F \cdot r^2}{E \cdot J}.$$

Kladné znaménko u deformace φ_F potvrzuje shodnost se smyslem jednotkového silového účinku (obr. ??b). Maximální ohybový moment je ve vetknutí křivého prutu

$$\max |M_o(s)| = F \cdot r$$

a pevnostní podmínka má tvar

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{o\max}}{W_o} \leq \sigma_D.$$

•

Příklad 1.2:

U prizmatického tenkého křivého prutu (obr. ??) stanovíme horizontální posuv kloubu B a určíme maximální ohybový moment. Třecí síly v uložení neuvažujeme.

S ohledem na symetrii prutu a symetrii zatížení podle osy y pro vertikální reakce plyne

$$R_A = R_B = F.$$

Symetrické je i namáhání a deformace obou polovin prutu. Symetrii prutu využijeme i ke stanovení horizontálního posuvu kloubu B . V bodě C , kterým prochází osa symetrie střednice prutu, nezmění tečna ke střednici svoji polohu ani při zatěžování silami F . Úhel natočení v tomto místě $\varphi_C = 0$. Obě části prutu se deformují symetricky, a proto můžeme v místě C prut rozdělit a vetknout (obr. ??b). Posuv $u_B/2$ určíme pomocí Mohrova integrálu (1.27)

$$\frac{u_B}{2} = \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \int_{(l)} M_o(s) \cdot m_{oB}(s) \cdot ds. \quad (\text{P-2.a})$$

Ohybový moment $m_{oB}(s)$ určíme pomocí jednotkové síly působící v bodě B . Pro obecné místo ξ (obr. ??b,c) v poli 01 platí

$$M_o(s) = -F \cdot r \cdot (1 - \cos \varphi),$$

$$m_{oB}(s) = -1 \cdot r \cdot \sin \varphi,$$

$$ds = r \cdot d\varphi,$$

meze integrační proměnné φ jsou

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Pro obecné místo η (obr. ?? b,c) v poli 12 určíme

$$M_o(s) = -F \cdot x + F \cdot (x - r) = -F \cdot r,$$

$$m_{oB}(s) = -1 \cdot r$$

a meze integrálu jsou

$$r \leq x \leq \frac{3}{2} \cdot r.$$

Maximální ohybový moment je v poli 12:

$$M_{o \max} = -F \cdot r.$$

K získání lepšího přehledu je vhodné vztahy v jednotlivých polích zapisovat do tabulky (viz tab. P-2.1). Výrazy z tabulky dosadíme do rov. (P-2.a)

Pole	01	12
$M_o(s)$	$-F \cdot r \cdot (1 - \cos \varphi)$	$-F \cdot r$
$m_{oB}(s)$	$-r \cdot \sin \varphi$	$-r$
ds	$r \cdot d\varphi$	dx
l	$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	$r \leq x \leq \frac{3r}{2}$

Tabulka P-2.1:

$$\frac{u_B}{2} = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left[F \cdot r^3 \cdot \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi - \sin \varphi \cdot \cos \varphi) \cdot d\varphi + F \cdot r^2 \cdot \int_r^{\frac{3 \cdot r}{2}} dx \right].$$

Po integraci a úpravě obdržíme pro celkový posuv

$$u_B = 2 \cdot \frac{F \cdot r^3}{E \cdot J}.$$

•

Při určování přetvoření lomených prutů složených pouze z přímých částí používáme s výhodou Vereščaginovu metodu jednotkových účinků.

Příklad 1.3: _____

Na obrázku ??a je rovinný, vetknutý křivý prut s přímými částmi, zatížený spojitým břemenem $q_o = \text{konst.}$ Uvedme postup určování horizontálního posuvu konce prutu B a stanovme $M_{o \max}$.

Na obrázku ??b je znázorněn průběh ohybového momentu podél střednice prutu od spojitěho zatížení. Při určování průběhu ohybových momentů postupujeme od volného konce B .

Z celkového průběhu $M_o(x)$ vyplývá, že

$$M_{o \max} = \frac{q_o \cdot h^2}{2}.$$

Ke stanovení horizontálního posuvu bodu B použijeme Vereščaginův vztah

$$u_B = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \sum_{i=1}^n A_{M_i} \cdot m_{oT_i}. \quad (\text{P-3.a})$$

i	A_{M_i}	m_{oT_i}	$A_{M_i} \cdot m_{oT_i}$
1	$\frac{1}{6}q_0h^3$	$\frac{3}{4}h$	$\frac{1}{8}q_0h^4$
2	$\frac{1}{2}q_0lh^2$	h	$\frac{1}{2}q_0lh^3$
3	$\frac{1}{2}q_0h^3$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{4}q_0h^4$
4	$-\frac{1}{2}q_0h^3$	$\frac{h}{3}$	$-\frac{1}{6}q_0h^4$
$\sum A_{M_i}m_{oT_i} =$			$\frac{1}{2}q_0h^3l \left[1 + \frac{5}{12} \frac{h}{l}\right]$

Tabulka P-3.1:

Průběh funkce $m_{oB}(s)$ od jednotkové síly působící v bodě B (obr. ??c) je uveden na obr. ??d. Z tabulky 1.5 je patrný postup získávání veličin pro rovnici (P-3.a). V poli 2A je průběh $M_o(s)$ určen dvojicí $(q_o \cdot h^2)/2$ a silou $q_o \cdot h$, působícími na část prutu 2A v bodě 2.

Prvky v posledním sloupci tabulky sečteme a podle rov. (P-3.a) pro posuv u_B dostaneme konečný výraz

$$u_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{q_o \cdot h^3 \cdot l}{E \cdot J} \cdot \left[1 + \frac{5}{12} \cdot \frac{h}{l}\right].$$

•

Literatura

- [1] Hájek E., Reif P., Valenta F.: Pružnost a pevnost I. SNTL, Praha, 1988
- [2] Höschl C.: Pružnost a pevnost ve strojírenství. SNTL, Praha, 1971
- [3] Pešina E., Reif P., Valenta F.: Sbíрка příkladů z pružnosti a pevnosti. SNTL, Praha, 1964
- [4] Nauka o pružnosti a pevnosti. Technický průvodce. Česká matice technická. VTN, Praha, 1950
- [5] Němec J., Dvořák J., Höschl C.: Pružnost a pevnost ve strojírenství. Technický průvodce 69. Česká matice technická. SNTL, Praha, 1989
- [6] Timoschenko S.P. - Gere J.M.: Mechanics of Materials. Van Nostrand Reinhold C., New York, 1972
- [7] William A.N.: Theory and Problems of Strength of Materials. McGraw-Hill Book Company, New York, 1972
- [8] Birger I.A., Mavljutov R.R.: Soprotivlenije materialov. Nauka, Moskva, 1986

Obsah

1	Křivé pruty	1
1.1	Úvod	1
1.2	Tenké křivé pruty	5
1.3	Průběhy posouvajících sil a ohybových momentů u křivých prutů	5
1.4	Vliv osových a posouvajících sil při rovinném ohybu křivých prutů	9
1.5	Deformace střednice tenkých křivých prutů	11