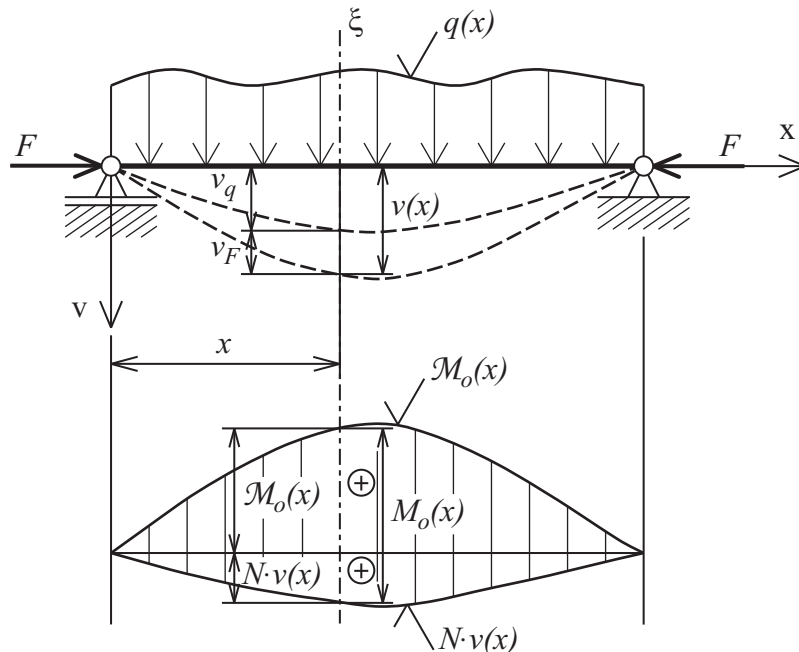


Kapitola 1

Kombinace ohybu a tlaku

1.1 Úvod

Při současném působení příčných a osových sil se nosník (obr. 1.1) nachází, v celém procesu zatěžování, v prohnutém stavu. Vzniká kombinace ohybu a tlaku. Nejedná se o stabilitní problém, tj. o stanovení podmínky ztráty přímosti prutu, ale o problém pevnostní. Aby nedošlo k příčnému vybočení prutu od působení samotné osově síly, musí být síla $F < F_{kr}$, kde F_{kr} je kritická Eulerova síla závislá na způsobu uložení konců prutu.



Obrázek 1.1:

Příčné síly jsou zachyceny v podporách a předpokládá se, že působí v jedné z hlavních rovin průřezu nosníku. Od příčných sil vzniká v řezu ξ (obr. 1.1) ohybový moment $M_o(x)$ a průhyb $v_q(x)$. Průhyb od osově síly je $v_F(x)$ a ohybový moment od této síly

$F \cdot v(x)$, kde v je výsledný průhyb od současného působení příčných a osových sil

$$v(x) = v_q(x) + v_F(x). \quad (1.1)$$

Výsledný ohybový moment v řezu ξ je určen součtem složek momentu

$$M_o(x) = \mathcal{M}_o(x) + F \cdot v(x). \quad (1.2)$$

Ze způsobu zatížení nosníku je patrné, že v případě zanedbání vlivu posouvající síly se jedná o jednoosý stav napjatosti. Pevnostní podmínku zapíšeme pro řez, ve kterém je výsledné napětí od ohybu a tlaku maximální. Je to řez, ve kterém je ohybový moment $M_o(x)$ maximální. Výsledné tlakové napětí je dáno vztahem

$$\sigma_{max} = \sigma_{o\ max} + \sigma_F, \quad (1.3)$$

kde $\sigma_{o\ max}$ je tlaková složka napětí od ohybu

$$\sigma_{o\ max} = \frac{M_{o\ max}}{W_o} \quad (1.4)$$

a σ_F je tlaková složka napětí od osově síly F ,

$$\sigma_F = \frac{F}{A}. \quad (1.5)$$

Pevnostní podmínka má pak tvar

$$\sigma_{max} = \frac{M_{o\ max}}{W_o} + \frac{F}{A} \leq \sigma_D. \quad (1.6)$$

U nosníků, které mají hlavní kvadratické momenty průřezu rozdílné, $J_1 \neq J_2$, a jsou příčně zatížené v rovině J_{max} , se kontroluje, zda nevznikne v rovině maximální tuhosti průřezu ztráta stability od působení samotné síly F . Při aplikaci pevnostní podmínky (1.6), v konkrétním případě, je nutné vyšetřit funkci průhybové křivky $v(x)$, pro kterou je ovšem nutné znát kvadratický moment průřezu. Proto se postupuje tak, že přípustné rozměry průřezu se určují odhadem na základě rozměrů, které získáme z pevnostní podmínky pouze od ohybu od příčných sil, t.j. jen z $M_{o\ max}$ a podmínky stability pro zvolenou hodnotu součinitele bezpečnosti

$$k_F = \frac{F_{kr}}{F},$$

kde uvažujeme kvadratický moment průřezu k ose ohybu od příčných sil na tlak od síly F . Stanovené rozměry se poněkud zvětší, než vyšly v dílčích podmínkách a použijí se při sestavení pevnostní podmínky (1.6), která respektuje kombinované namáhání v ohybu a tlaku.

1.2 Výpočet ohybového momentu

Funkce průhybové křivky v (1.2) je závislá na výsledném ohybovém momentu $M_o(x)$. Tuto závislost vyšetříme následujícím postupem. Rovnici (1.2) dvakrát derivujeme podle nezávislé proměnné x

$$M_o''(x) = \mathcal{M}_o''(x) + N \cdot v''(x) \quad (1.7)$$

a za $v''(x)$ dosadíme diferenciální rovnici průhybové křivky pro prizmatický nosník

$$v''(x) = -\frac{M_o(x)}{EJ}. \quad (1.8)$$

Po úpravě získáme diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními činiteli pro ohybový moment $M_o(x)$.

$$M_o''(x) + \alpha^2 \cdot M_o(x) = \mathcal{M}_o''(x), \quad (1.9)$$

kde

$$\alpha^2 = \frac{F}{EJ}.$$

Obecný integrál rovnice (1.9) je

$$M_o(x) = A \cdot \sin \alpha x + B \cdot \cos \alpha x + M_{op}. \quad (1.10)$$

A , B jsou integrační konstanty, které určíme z okrajových podmínek, M_{op} je partikulární integrál rovnice (1.10). Známe-li nyní $M_o(x)$, můžeme z rovnice (1.2) určit průhyb $v(x)$. Postupovat lze i tak, že stanovíme funkci průhybu $v(x)$, pomocí které vypočteme $M_o(x)$ rovněž podle rovnice (1.2).

1.3 Výpočet průhybu

Při sestavování diferenciální rovnice funkce $v(x)$ vycházíme z diferenciální rovnice průhybové křivky (1.8)

$$v''(x) = -\frac{M_o(x)}{EJ}.$$

Ohybový moment $M_o(x)$ dosadíme podle rov. (1.2) a po úpravě dostaneme diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními činiteli pro hledanou funkci $v(x)$, popisující výsledný průhyb nosníku

$$v''(x) + \alpha^2 v(x) = -\frac{\alpha^2}{F} \mathcal{M}_o(x), \quad (1.11)$$

kde

$$\alpha^2 = \frac{F}{EJ}.$$

Řešením je obecný integrál

$$v(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x + v_p. \quad (1.12)$$

A , B jsou integrační konstanty, které opět určíme z okrajových podmínek a v_p je partikulární integrál úplné rovnice (1.11). Dosazením funkce průhybové křivky $v(x)$ z rov. (1.12) do rov. (1.2), dostaneme ohybový moment $M_o(x)$ a určíme jeho maximum $M_{o\max}$ pro dimenzování podle pevnostní podmínky (1.6).

Obě rovnice (1.9) a (1.11) jsou formálně totožné diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními činiteli a s pravou stranou. Ke stanovení funkce $M_o(x)$ resp. $v(x)$ použijeme rovnici (1.9) resp. (1.11) a ke stanovení zbývajících neznámých použijeme rov. (1.2).

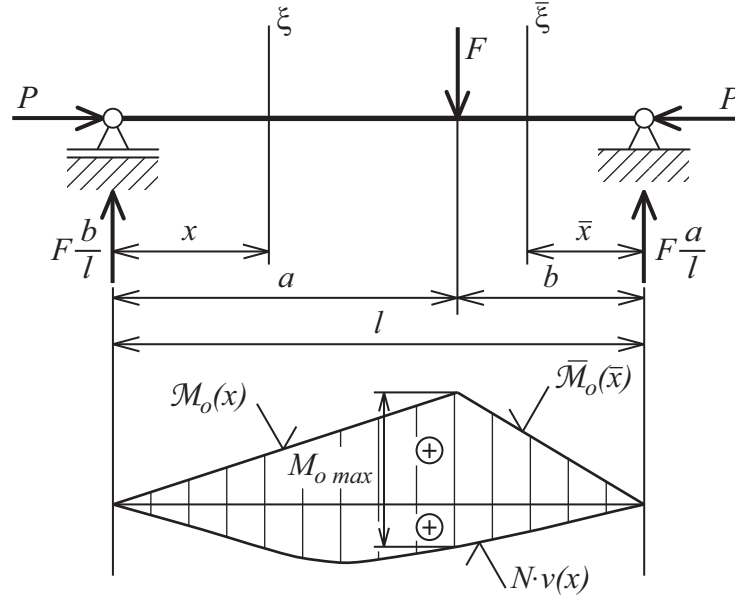
Přímý výpočet momentu $M_o(x)$ z rov. (1.7) je jednodušší při určování partikulárního integrálu M_{op} v případech, kdy $\mathcal{M}_o(x)$ je vyjádřen polynomem. Druhá derivace polynomu $\mathcal{M}_o(x)$ je nižšího řádu a např. při zatížení nosníku osamělými silami je $\mathcal{M}_o''(x) = 0$ a partikulární integrál je roven nule. Komplikace mohou nastat při určování okrajových podmínek pro $M_o(x)$ a $M_o'(x)$, zatím co okrajové podmínky pro řešení rov. (1.11) plynou z podmínek uložení nosníku.

1.4 Příklady kombinací ohybu a tlaku

Aplikujme uvedené postupy řešení pevnosti nosníků namáhaných ohybem a tlakem na některé případy zatížení příčnými a osovými silovými účinky.

Příklad 1.1:

Uvažujme případ uvedený na obr. P-1.1. Nosník uložený na kloubových podporách je zatížen příčnou silou F a osovou silou P . V řezu ξ v poli a ($0 \leq x \leq a$) je ohybový



Obrázek P-1.1:

moment od příčné síly F

$$\mathcal{M}_o(x) = F \cdot \frac{b}{l} \cdot x \quad \text{a} \quad \mathcal{M}_o''(x) = 0.$$

V řezu $\bar{\xi}$, v poli b ($0 \leq \bar{x} \leq b$) je ohybový moment od příčné síly F

$$\bar{\mathcal{M}}_o(\bar{x}) = F \cdot \frac{a}{l} \cdot \bar{x} \quad \text{a} \quad \bar{\mathcal{M}}_o''(\bar{x}) = 0.$$

Pro každé pole vyjádříme samostatnou homogenní diferenciální rovnici (1.9)

$$M_o''(x) + \alpha^2 M_o(x) = 0 \quad \text{a} \quad \bar{M}_o''(\bar{x}) + \alpha^2 \bar{M}_o(\bar{x}) = 0.$$

Řešení obou rovnic je

$$M_o(x) = A \cdot \cos \alpha x + B \cdot \sin \alpha x \quad \bar{M}_o(\bar{x}) = C \cdot \cos \alpha \bar{x} + D \cdot \sin \alpha \bar{x}.$$

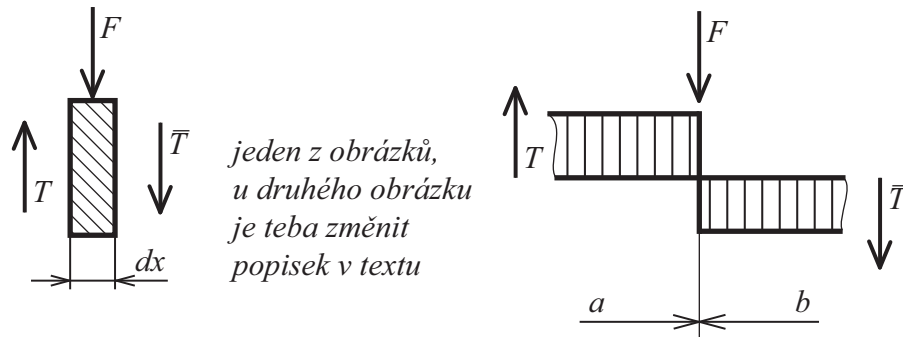
A, B, C, D jsou integrační konstanty, které určíme z následujících okrajových podmínek

1. pro $x = 0$ je $M_o(0) = 0$ a $A = 0$

2. pro $\bar{x} = 0$ je $\bar{M}_o(0) = 0$ a $C = 0$
3. pro $x = a$ a $\bar{x} = b$ je ohybový moment pro obě pole stejný

$$M_o(a) = \bar{M}_o(b)$$

4. pro $x = a$ a $\bar{x} = b$ se posouvající síla T v působišti síly F mění skokem o hodnotu F , což vyplývá z rovnováhy elementu na obr. P-1.2. Proto



Obrázek P-1.2:

$$T(a) - F - \bar{T}(b) = 0, \quad \text{resp.} \quad T(a) - \bar{T}(b) = F.$$

Aplikací Schwedlerovy věty ve tvaru $M' = T$ a $\bar{M}' = -\bar{T}$ lze dále psát

$$T(a) - \bar{T}(b) = M'_o(a) + \bar{M}'_o(b) = F.$$

Po dosazení do okrajových podmínek 3 a 4 získáme soustavu

$$\begin{aligned} B \sin \alpha a - D \sin \alpha b &= 0, \\ \alpha B \cos \alpha a + \alpha D \cos \alpha b &= F \end{aligned}$$

pro neznámé integrační konstanty B a D . Jejím řešením jsou konstanty

$$B = \frac{F}{\alpha} \cdot \frac{\sin \alpha b}{\sin \alpha l} \quad \text{a} \quad D = \frac{F}{\alpha} \cdot \frac{\sin \alpha a}{\sin \alpha l}.$$

Průběhy ohybových momentů v každém poli jsou

$$M_o(x) = \frac{F}{\alpha} \cdot \frac{\sin \alpha b}{\sin \alpha l} \cdot \sin \alpha x \quad \text{a} \quad \bar{M}_o(\bar{x}) = \frac{F}{\alpha} \cdot \frac{\sin \alpha a}{\sin \alpha l} \cdot \sin \alpha \bar{x}.$$

Maximální ohybový moment se nachází v delším poli v místě, kde např. pro $a > b$, je $M'_o(x) = 0$. Pro nosník zatížený silou F uprostřed délky l , $a = b = l/2$, stanovíme

$$M_{o_{max}} = \frac{F}{\alpha} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\alpha l}{2}}{2 \cdot \sin \frac{\alpha l}{2} \cdot \cos \frac{\alpha l}{2}} = \frac{F}{2 \cdot \alpha} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2}.$$

Rovnici lze ještě dále upravit

$$M_{o\max} = \frac{Fl}{4} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha \cdot l}{2}}{\frac{\alpha \cdot l}{2}} = \mathcal{M}_{o\max} \cdot \mu_F,$$

kde

$$\mathcal{M}_{o\max} = \frac{F \cdot l}{4},$$

je maximální ohybový moment od příčné síly F a μ_P je faktor vyjadřující vliv osové síly na maximální ohybový moment.

Průhyb stanovíme pomocí rovnice (1.2)

$$v(x) = \frac{1}{P} [M_o(x) - \mathcal{M}_o(x)].$$

Pro maximální průhyb plyne

$$v\left(\frac{l}{2}\right) = v_{\max} = \frac{F \cdot l}{4} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2}}{\frac{\alpha l}{2}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{P}.$$

Rovnici lze opět upravit

$$v_{\max} = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha \cdot l}{2}}{\frac{\alpha l}{2}} - 1 \right) \frac{12}{\pi^2} \frac{P_\varepsilon}{P} = v_{F\max} \cdot \gamma_P,$$

kde $v_{F\max} = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J}$ je maximální průhyb od příčné síly F a γ_P je faktor vyjadřující vliv osové síly P . P_ε je kritická Eulerova síla pro nosník namáhaný pouze osovou silou.

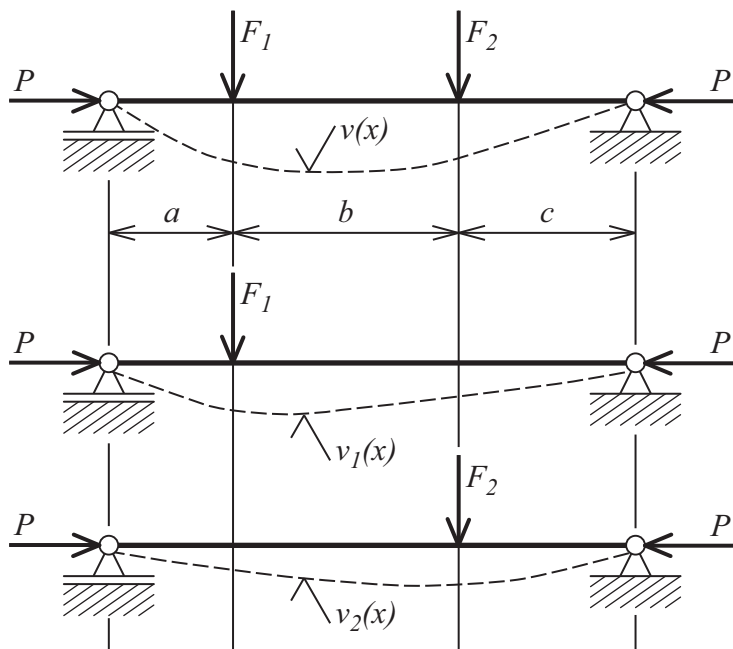
Poznámka: Z rovnic pro $M_o(x)$ a $v(x)$ je patrné, že obě funkce jsou lineárně závislé na příčném zatížení a nelineárně závislé na osové síle P . Působí-li např. na prut více příčných sil F_n , výsledný průhyb lze získat tak, že na nosník působí současně všechny příčné síly a síla osová. Pak je nutné sestavit $(n+1)$ diferenciálních rovnic (1.9) nebo (1.11) a pro každé řešení předepsat $2 \cdot (n+1)$ okrajových podmínek. Tento postup je jistě obtížný, zejména při řešení úlohy podle (1.9), kde pro okrajové podmínky je nutné stanovit $M_o(x)$ resp. $M'_o(x)$. Výsledný průhyb při působení většího počtu příčných sil lze však získat také součtem dílčích průhybů za současného působení jedné příčné síly a osové síly P . Postup výpočtu je naznačen na obr. P-1.3. Průhyb stanovíme součtem

$$v(x) = v_1(x) + v_2(x)$$

a výsledný ohybový moment

$$M_o(x) = M_{o1}(x) + M_{o2}(x)$$

pomocí rovnice (1.2).



Obrázek P-1.3:

Příklad 1.2: _____

Dalším příkladem, jehož řešení uvedeme je nosník zatížený spojitým břemenem a osovou silou F (obr. P-2.1). Stanovíme $M_{o\max}$ a v_{\max} . Použijeme řešení podle rov. (1.9). Pro $0 \leq x \leq l$ je ohybový moment od příčných sil

$$\mathcal{M}_o(x) = q_0 \cdot \frac{l}{2} \cdot x - \frac{q_0 \cdot x^2}{2}$$

a

$$\mathcal{M}_o''(x) = -q_0 \cdot$$

Diferenciální rovnice ohybového momentu bude mít tvar

$$\mathcal{M}_o''(x) + \alpha^2 \mathcal{M}_o(x) = -q_0 \cdot$$

Obecný integrál je

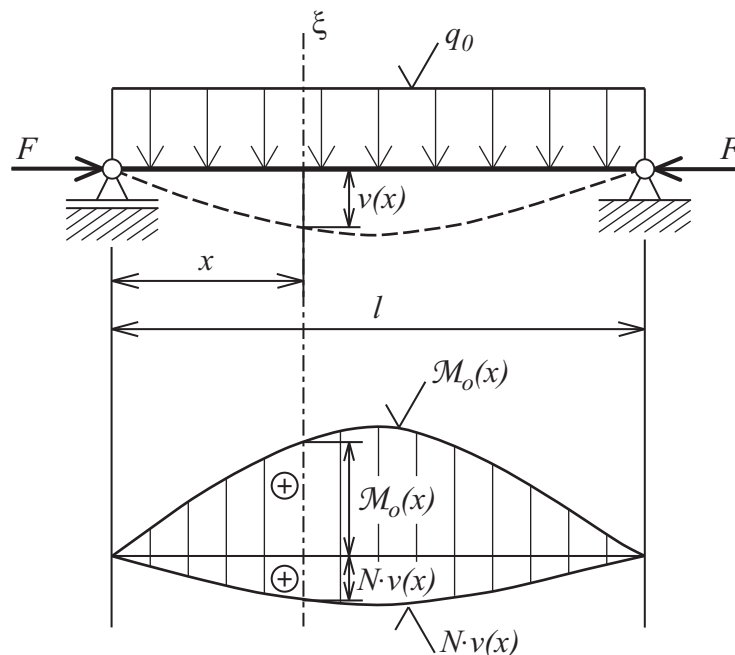
$$\mathcal{M}_o(x) = A \cdot \cos \alpha x + B \cdot \sin \alpha x - \frac{q_0}{\alpha^2} \cdot$$

Okrajové podmínky pro řešení integračních konstant jsou

1. pro $x = 0$ je $M_o(0) = 0$
2. pro $x = l$ je $M_o(l) = 0$

Po dosazení do předchozí rovnice určíme integrační konstanty A, B :

$$A = \frac{q_0}{\alpha^2} \quad \text{a} \quad B = \frac{q_0}{\alpha^2} \frac{1 - \cos \alpha l}{\sin \alpha l} = \frac{q_0}{\alpha^2} \tan \frac{\alpha l}{2} \cdot$$



Obrázek P-2.1:

Výsledný ohybový moment v obecném řezu je

$$M_o(x) = \frac{q_0}{\alpha^2} \cdot \left(\cos \alpha x + \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} \sin \alpha x - 1 \right) \cdot$$

Maximální ohybový moment je pro $x = l/2$ roven

$$M_{o \max} = q_0 \cdot \frac{l^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1 - \cos \frac{\alpha l}{2}}{\left(\frac{\alpha l}{2}\right)^2 \cdot \cos \frac{\alpha l}{2}} = \mathcal{M}_{o \max} \cdot \mu_F,$$

kde $\mathcal{M}_{o \max}$ je maximální ohybový moment od příčného zatížení q_0 a μ_F je faktor určující vliv osové síly F .

Pomocí rov. (1.2) lze vyšetřit průhyb v obecném místě nosníku. Maximální průhyb uprostřed nosníku je

$$v_{\max} = \frac{\mathcal{M}_{o \max}}{F} \cdot \left[\frac{\mathcal{M}_{o \max}}{\mathcal{M}_{o \max}} - 1 \right].$$

Z předchozího vztahu určíme poměr

$$\frac{M_{o \max}}{\mathcal{M}_{o \max}} = 2 \cdot \frac{1 - \cos \frac{\alpha l}{2}}{\left(\frac{\alpha l}{2}\right)^2 \cdot \cos \frac{\alpha l}{2}},$$

dosadíme do rovnice pro v_{\max}

$$v_{max} = q_0 \cdot \frac{l^2}{8 \cdot F} \left[2 \cdot \frac{1 - \cos \frac{\alpha l}{2}}{\left(\frac{\alpha l}{2}\right)^2 \cdot \cos \frac{\alpha l}{2}} - 1 \right]$$

a upravíme

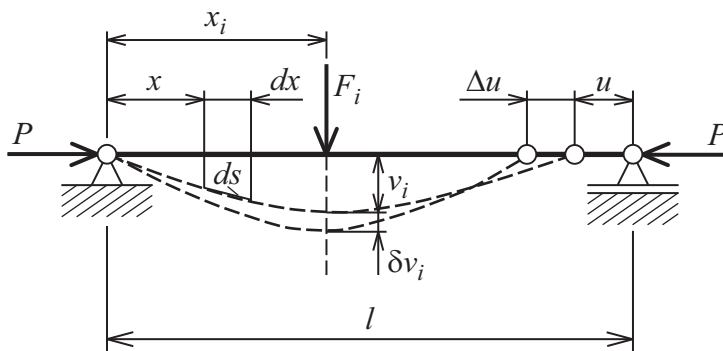
$$v_{max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_0 \cdot l^4}{E \cdot J} \left[2 \cdot \frac{1 - \cos \frac{\alpha l}{2}}{\left(\frac{\alpha l}{2}\right)^2 \cdot \cos \frac{\alpha l}{2}} - 1 \right] \cdot \frac{48}{5 \cdot \pi^2} \frac{F_\varepsilon}{F} = v_q \gamma_F,$$

kde $v_q = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_0 \cdot l^4}{E \cdot J}$ je maximální průhyb uprostřed nosníku vzniklý pouze od příčného spojitého zatížení q_0 a γ_F je faktor navyšující průhyb v důsledku působení osově síly F .

•

1.5 Energetická metoda – přibližné řešení kombinace ohybu a tlaku

V případech, kdy se jedná o složitý způsob zatížení nosníku, jak jsme se již zmínili, jako je např. působení většího počtu příčných silových účinků a tlakové síly osově, je exaktní postup výpočtu ohybového momentu $M_o(x)$ (1.2) pro pevnostní podmínku (1.6) složitý a zdlouhavý. Pro praktické použití je přibližná energetická metoda výhodnější. Uvažujme kloubově uložený nosník zatížený příčnými silami F_i , obr. 1.2 a osovou silou P , namáhající prut tlakem.



Obrázek 1.2:

Průhybovou čáru, respektující okrajové podmínky, zvolíme ve tvaru

$$v(x) = K \cdot \eta(x), \quad (1.13)$$

kde $\eta(x)$, jak bylo již zmíněno, je funkce udávající tvar průhybové čáry a K její vypuklost – měřítko, které pro daný případ zatížení neznáme. Připomeňme si, že se při

této kombinaci ohybu a tlaku nejedná o stabilitní případ, kdy vyšetřujeme indiferentní stav rovnováhy, kterému přísluší libovolný průhyb v mezích Hookova zákona. Zde tudíž přísluší určitému zatížení určitý stabilní průhyb a odpovídá mu rovnováha vnějších a vnitřních sil. Pod silou F_i je průhyb

$$v_i = K \cdot \eta(x_i) \quad (1.14)$$

a v důsledku prohnutí nosníku se pravý kloub prutu posune o u . Velikost posuvu u (obr. 1.2) určíme ze vztahu

$$u = \int_l (ds - dx) = \frac{1}{2} \int_l [v'(x)]^2 dx, \quad (1.15)$$

jak plyne podle pravidel počítání s malými čísly (rov.??) **nemel by byt odkaz na ???**. Vztah upravíme pomocí rov. (1.13)

$$u = \frac{K^2}{2} \int_0^l [\eta'(x)]^2 dx = \frac{K^2}{2} \cdot B, \quad (1.16)$$

kde B je konstanta závislá na tvaru funkce $\eta(x)$.

Nyní vnějším zásahem změním rovnovážný stav vnějších a vnitřních sil tak, že vyvoláme virtuální posuv δu působitě osově síly P a virtuální posuvy δv_i působitě příčných sil F_i . Současně se změní energie vnitřních sil o virtuální přírůstek. Když tyto virtuální změny posuvu opět uvolníme, prut zaujme svoji původní průhybovou křivku a vnější síly P a F_i přitom vykonají práci. Přírůstek práce vnějších sil je roven akumulované deformační energii, tj.

$$\delta W = \delta U. \quad (1.17)$$

Elementární práce vnějších sil při vratném posuvu je

$$\delta W = P \cdot \delta u + \sum F_i \cdot \delta v_i, \quad (1.18)$$

kde

$$\delta u = B \cdot K \cdot \delta K \quad \text{a} \quad \delta v_i = \delta K \cdot \eta(x_i), \quad (1.19)$$

jak je patrné z rov. (1.16) a (1.14). Dosadíme zpět do rov. (1.18)

$$\delta W = P \cdot B \cdot K \delta K + \delta K \cdot \sum F_i \cdot \eta(x_i). \quad (1.20)$$

Potenciální energie napjatosti v nosníku U , uvažujeme-li pouze ohyb, je dána vztahem

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_o^2(x)}{E \cdot J} dx. \quad (1.21)$$

Za $M_o(x)$ dosadíme z diferenciální rovnice průhybové křivky $M_o(x) = -E \cdot J \cdot v''(x)$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l E \cdot J \cdot [v''(x)]^2 dx \quad (1.22)$$

a z rovnice (1.13) je $v''(x) = K \cdot \eta''(x)$, takže pro potenciální energii dostaneme vztah

$$U = \frac{K^2}{2} \int_0^l E \cdot J \cdot [\eta''(x)]^2 dx = \frac{K^2}{2} \cdot C, \quad (1.23)$$

kde C je konstanta závislá na zvoleném tvaru průhybové čáry $\eta(x)$, stejně jako konstanta B , zavedená v rovnici (1.16) – je to opět funkcionál s argumentem $\eta(x)$. Přírůstek potenciální energie (1.23) při virtuální změně průhybu nosníku je

$$\delta U = K \delta \cdot K \cdot C. \quad (1.24)$$

Rovnost elementárních přírůstků energie podle rov. (1.17) má tvar

$$K \cdot C \cdot \delta K = \left(P \cdot B \cdot K + \sum F_i \cdot \eta(x_i) \right) \cdot \delta K, \quad (1.25)$$

po úpravě

$$K \cdot C \left(1 - P \cdot \frac{B}{C} \right) = \sum F_i \cdot \eta(x_i),$$

odkud určíme vypuklost K prohnutého nosníku

$$K = \frac{\sum F_i \cdot \eta(x_i)}{C \left(1 - P \cdot \frac{B}{C} \right)} = \frac{\sum F_i \cdot \eta(x_i)}{\int_0^l E \cdot J \cdot [\eta''(x)]^2 dx} \cdot \frac{1}{1 - P \cdot \frac{\int_0^l [\eta'(x)]^2 dx}{\int_0^l E \cdot J \cdot [\eta''(x)]^2 dx}}. \quad (1.26)$$

Pro prizmatický nosník $E \cdot J = konst.$ se tvar vztahu zjednoduší

$$K = \frac{\sum F_i \cdot \eta(x_i)}{\int_0^l E \cdot J \cdot [\eta''(x)]^2 dx} \cdot \frac{1}{1 - \frac{P}{E \cdot J} \cdot \frac{\int_0^l [\eta'(x)]^2 dx}{\int_0^l [\eta''(x)]^2 dx}}. \quad (1.27)$$

V rovnici $v(x) = K \cdot \eta(x)$ volíme tvarovou funkci $\eta(x)$ s ohledem na okrajové podmínky. Ve volbě $\eta(x)$ spočívá přibližnost řešení. Při uvážlivé volbě tvaru průhybové čáry $\eta(x)$ je chyba zanedbatelná. Z rovnice (1.26) je patrné, že metodu lze použít i pro neprizmatické pruty. Pro souměrné zatížení a kloubové uložení volíme nejčastěji funkci $\eta(x)$ ve tvaru půlvlny sinusovky

$$v(x) = K \cdot \sin \frac{\pi x}{l} = K \cdot \eta(x).$$

Pro rovnici (1.26) určíme

$$\eta'(x) = \frac{\pi}{l} \cdot \cos \frac{\pi x}{l}, \quad [\eta'(x)]^2 = \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi x}{l},$$

$$\eta''(x) = - \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cdot \sin \frac{\pi x}{l}, \quad [\eta''(x)]^2 = \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{l}$$

a integrály

$$\int_0^l [\eta'(x)]^2 dx = \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{\pi^2}{2l}, \quad \int_0^l [\eta''(x)]^2 dx = \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{\pi^4}{2l^3}.$$

Po dosazení do rov. (1.27) a úpravě stanovíme měřítko vypuklosti

$$K = \frac{\sum F_i \cdot \sin \frac{\pi x_i}{l}}{E \cdot J \cdot \frac{\pi^4}{2 \cdot l^3}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{P}{E \cdot J} \cdot \left(\frac{l}{\pi}\right)^2} = \frac{\sum F_i \cdot \sin \frac{\pi x_i}{l}}{E \cdot J \cdot \frac{\pi^4}{2 \cdot l^3}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{P}{P_\varepsilon}}.$$

Zavedeme-li do rovnice poměr

$$\frac{P_\varepsilon}{P} = k_\varepsilon,$$

kde P_ε je kritická Eulerova síla pro nosník kloubově uložený a namáhaný pouze osovou silou, dostaneme konečný tvar rovnice pro vypuklost průhybové čáry

$$K = \frac{l^3 \sum F_i \cdot \sin \frac{\pi x_i}{l}}{48,7 \cdot E \cdot J} \cdot \frac{k_\varepsilon}{k_\varepsilon - 1}.$$

Literatura

- [1] DUCHÁČEK, J.: Nauka o pružnosti a pevnosti I. SNTL, Praha 1957
- [2] DUCHÁČEK, J.: Nauka o pružnosti a pevnosti II. SNTL, Praha 1964
- [3] HÁJEK, E. a kolektiv : Pružnost a pevnost II. V ČVUT, Praha, 1979
- [4] HÁJEK, E., REIF, P., VALENTA, F.: Pružnost a pevnost I. SNTL/ALFA, Praha 1988
- [5] HÖSCHL, C.: Pružnost a pevnost ve strojírenství. SNTL/ALFA, Praha 1971
- [6] JANATKA, J.: Pružnost a pevnost I. SNTL-ČVUT, Praha 1956
- [7] JANATKA, J.: Pružnost a pevnost II. SNTL-ČVUT, Praha 1957
- [8] JANÍČEK, P., PETRUŠKA, J.: Úlohy z pružnosti a pevnosti II. ES VUT, Brno 1990
- [9] LENERT, J.: Pružnost a pevnost II. VŠB-TU, Ostrava 1998
- [10] MICHALEC, J.: Pružnost a pevnost I. v.ČVUT, Praha 2001
- [11] MICHALEC, J.: Pružnost a pevnost II. v. ČVUT, Praha 2001
- [12] NĚMEC, J.: Tuhost a pevnost ocelových částí. ČSAV, Praha 1963
- [13] ONDRÁČEK, E., FARLÍK, A.: Mezní stavy v pevnostních výpočtech. SNTL, Praha 1973
- [14] PISARENKO, G.S. : Soprotivlenije materialov. VŠ Kyjev, 1986
- [15] PEŠINA, E., REIF, P., VALENTA, F.: Sbíрка příkladů z pružnosti a pevnosti. SNTL, Praha 1964
- [16] POPOV, E. P.: Introduction to mechanics of solids. Prentice-Hall, London 1968
- [17] PUCHMAJER, P.: Pružnost a pevnost. ČVUT Praha 1999
- [18] RŮŽIČKA, M., HANKE, M., ROST, M. : Dynamická pevnost a životnost. FS-ČVUT, Praha, 1987
- [19] SERVÍT, R., DOLEŽALOVÁ, E., CRHA, M.: Teorie pružnosti a plasticity I. SNTL/ALFA, Praha 1981

- [20] SERVÍT, R., DRAHOŇOVSKÝ, Z., ŠEJNOHA, J.: Teorie pružnosti a plasticity II. ČVUT, Praha 1979
- [21] ŠEJNOHA, J., BITTNAROVÁ, J. : Pružnost a pevnost 20. V-ČVUT, Praha, 1998
- [22] TIMOSCHENKO, S. P., GERE, J. M. : Mechanics of Materials. D. Van Nostrand, New York, 1972
- [23] TREBUŇA, F., ŠIMČÁK, F., JURICA, V.: Pružnost a pevnost I, II. Viena, Košice 2000
- [24] WASCHIZU, K.: Variational methods in elasticity nad plasticity. Pergamon, New York, 1974

Obsah

1	Kombinace ohybu a tlaku	2
1.1	Úvod	2
1.2	Výpočet ohybového momentu	3
1.3	Výpočet průhybu	4
1.4	Příklady kombinací ohybu a tlaku	5
1.5	Energetická metoda – přibližné řešení kombinace ohybu a tlaku	10