



# **Dynamická pevnost a životnost**

## **Jur, příklad VII**

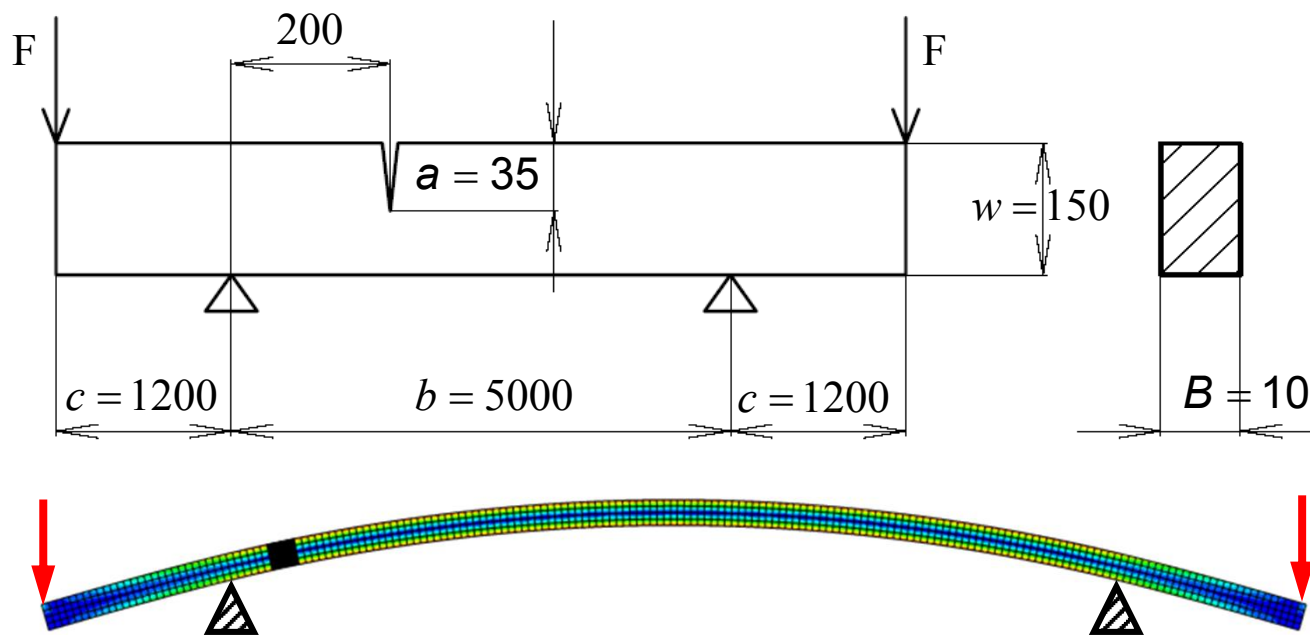
Milan Růžička, Josef Jurenka, Martin Nesládek



# Šíření únavových trhlin

Nosník je namáhán harmonickou silou  $F$ . Charakter namáhání odpovídá dvěma režimům zatěžování s konstantní hodnotou střední a amplitudové složky – blokové zatěžování (dva bloky). Směr síly  $F$  ukazuje kladné hodnoty (je to vektor).

Vypočítejte prodloužení délky únavové trhliny po aplikaci obou zátěžných režimů (bloků). Přírůstek délky trhliny počítejte pro celý blok zatížení, tzn. proveďte dvě výpočtové iterace. Při výpočtu nevažujte vliv plastické zóny na uzavírání trhliny. Počáteční délka trhliny je  $a_0 = 35$  mm. Vztažné napětí vypočtete podle obvyklých zvyklostí.





## Vstupní data

- ✓ Rozměry nosníku a určení působíště zátěžných sil.
- ✓ Definice zátěžných sil:

<i>Síla F</i>	<i>Střední hodnota [N]</i>	<i>Amplituda [N]</i>	<i>Počet cyklů [-]</i>
<i>Režim (blok) 1</i>	250	200	100 000
<i>Režim (blok) 2</i>	50	550	70 000

- ✓ Růstový zákon:

Parisův vztah

$$v = \frac{da}{dN} = A \cdot \Delta K^m$$

Faktor intenzity napětí

$$K_I = Y \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$

Korekční funkce

$$Y = 5.404 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^3 - 0.751 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^2 - 0.078 \cdot \left(\frac{a}{W}\right) + 1.062$$



# Vstupní data

✓ Materiálové charakteristiky:

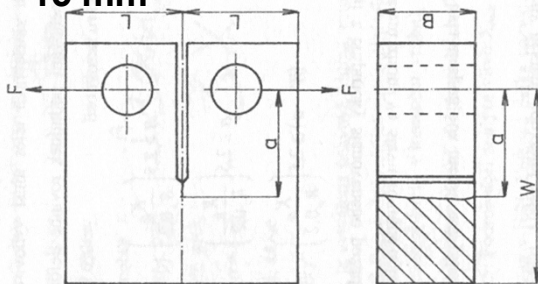
Koeficient a exponent parisova vztahu

$$v = \frac{da}{dN} = A \cdot \Delta K^m$$

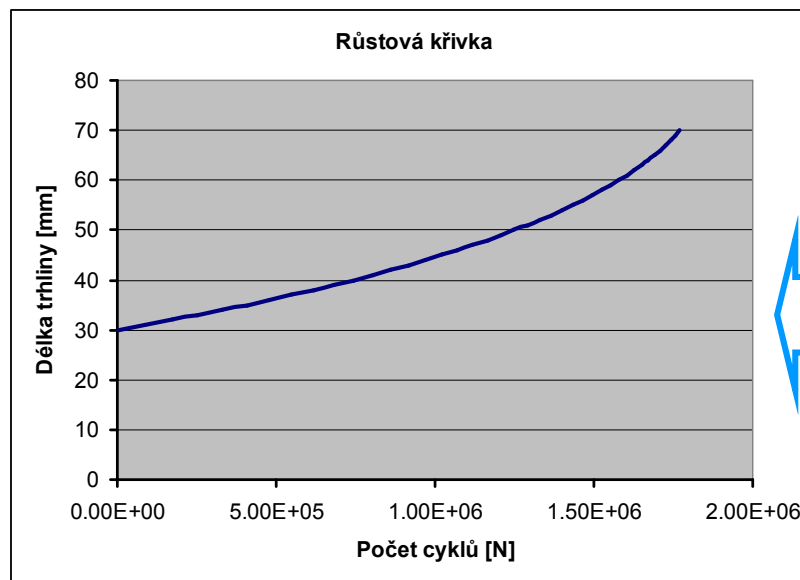
Vyjděte ze zadané růstové křivky (dokumentující šíření trhliny v Parisově oblasti) únavové trhliny.

$W = 100 \text{ mm}$ ,  $F_{\min} = 0$ ,  $F_{\max} = 3500 \text{ N}$

$B = 15 \text{ mm}$



$$K_I = \frac{F}{BW^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)^2} \left[ 0.886 + 4.64 \left(\frac{a}{W}\right) - 13.32 \left(\frac{a}{W}\right)^2 + 14.72 \left(\frac{a}{W}\right)^3 - 5.6 \left(\frac{a}{W}\right)^4 \right]$$



a [mm]	N [-]
30	0
31	88243
32	172931
33	254272
34	332451
35	407634
36	479969
37	549591
38	616620
39	681164
40	743322
41	803181
42	860822
43	916318
44	969733
45	1021130
46	1070562
47	1118080
48	1163731
49	1207560
50	1249606
51	1289908
52	1328504
53	1365428
54	1400715
55	1434399
56	1466512
57	1497088
58	1526159
59	1553759
60	1579921
61	1604680
62	1628071
63	1650130
64	1670892
65	1690395
66	1708678
67	1725780
68	1741740
69	1756599
70	1770399



# Zpracování růstové křivky

Určení koeficient a exponent Parisova vztahu  $v = \frac{da}{dN} = A \cdot \Delta K^m$

1) Výpočet rychlosti šíření pro dvě délky trhliny.

$$\Delta a_1 = 35 - 34 = 1$$

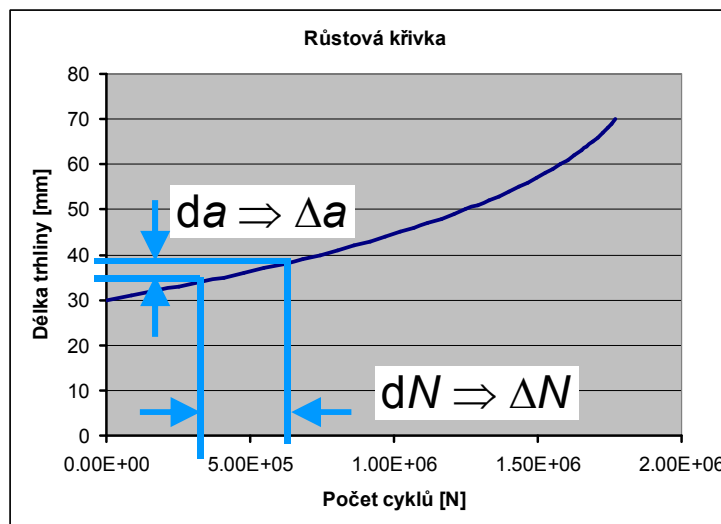
$$\Delta N_1 = 407634 - 332451 = 75183$$

$$\frac{\Delta a_1}{\Delta N_1} = v_1 = \frac{1}{75183} = 1.33 \cdot 10^{-5} \left[ \frac{\text{mm}}{\text{cyklus}} \right]$$

$$\Delta a_2 = 58 - 57 = 1$$

$$\Delta N_2 = 1526159 - 1497088 = 29071$$

$$\frac{\Delta a_2}{\Delta N_2} = v_2 = \frac{1}{29071} = 3.44 \cdot 10^{-5} \left[ \frac{\text{mm}}{\text{cyklus}} \right]$$



a [mm]	N [-]
30	0
31	88243
32	172931
33	254272
34	332451
35	407634
36	479969
37	549591
38	616620
39	681164
40	743322
41	803181
42	860822
43	916318
44	969733
45	1021130
46	1070562
47	1118080
48	1163731
49	1207560
50	1249606
51	1289908
52	1328504
53	1365428
54	1400715
55	1434399
56	1466512
57	1497088
58	1526159
59	1553759
60	1579921
61	1604680
62	1628071
63	1650130
64	1670892
65	1690395
66	1708678
67	1725780
68	1741740
69	1756599
70	1770399



# Zpracování růstové křivky

Určení koeficient a exponent Parisova vztahu  $v = \frac{da}{dN} = A \cdot \Delta K^m$

2) Výpočet rozkmitu faktoru intenzity napětí.

$$K_{I,1,\min} = 0$$

$$K_{I,1,\max} = \frac{F}{BW^{\frac{1}{2}}} \frac{\left(2 + \frac{a}{W}\right)^2}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)^{\frac{2}{3}}} \left[ 0.886 + 4.64 \left(\frac{a}{W}\right) - 13.32 \left(\frac{a}{W}\right)^2 + 14.72 \left(\frac{a}{W}\right)^3 - 5.6 \left(\frac{a}{W}\right)^4 \right] =$$

$$= \frac{3500}{15 \cdot 100^{\frac{1}{2}}} \frac{\left(2 + \frac{34.5}{100}\right)^2}{\left(1 - \frac{34.5}{100}\right)^{\frac{2}{3}}} \left[ 0.886 + 4.64 \left(\frac{34.5}{100}\right) - 13.32 \left(\frac{34.5}{100}\right)^2 + 14.72 \left(\frac{34.5}{100}\right)^3 - 5.6 \left(\frac{34.5}{100}\right)^4 \right] =$$

$$= 103.5 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$$

$$\Delta K_{I,1} = 103.5 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$$

$$K_{I,2,\min} = 0$$

$$K_{I,2,\max} = 142 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$$

$$\Delta K_{I,2} = 142 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$$

a [mm]	N [-]
30	0
31	88243
32	172931
33	254272
34	332451
35	407634
36	479969
37	549591
38	616620
39	681164
40	743322
41	803181
42	860822
43	916318
44	969733
45	1021130
46	1070562
47	1118080
48	1163731
49	1207560
50	1249606
51	1289908
52	1328504
53	1365428
54	1400715
55	1434399
56	1466512
57	1497088
58	1526159
59	1553759
60	1579921
61	1604680
62	1628071
63	1650130
64	1670892
65	1690395
66	1708678
67	1725780
68	1741740
69	1756599
70	1770399



# Zpracování růstové křivky

Určení koeficient a exponent Parisova vztahu  $v = \frac{da}{dN} = A \cdot \Delta K^m$

3) Výpočet koeficientu a exponentu Parisova vztahu.

$$v = \frac{da}{dN} = A \cdot \Delta K^m \xrightarrow{\text{logaritmování}}$$

$$\log\left(\frac{da}{dN}\right) = m \cdot \log(\Delta K) + \log(A)$$

$$\log(1.33 \cdot 10^{-5}) = m \cdot \log(103) + \log(A)$$

$$\log(3.44 \cdot 10^{-5}) = m \cdot \log(142) + \log(A)$$

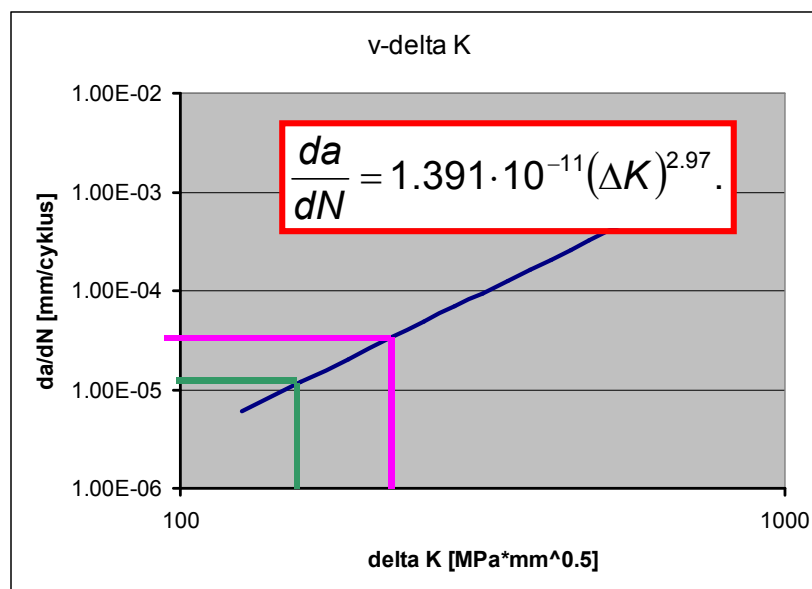
$$-4.876 = 2.013 \cdot m + \log(A)$$

$$-4.463 = 2.152 \cdot m + \log(A)$$

⇓

$$m = 2.971$$

$$A = 1.391 \cdot 10^{-11} \left[ \frac{\text{mm}}{\text{cyklus} (\text{MPa} \sqrt{\text{mm}})^{2.971}} \right]$$



$$\Delta K_{I,1} = 103.5 \text{ MPa} \sqrt{\text{mm}}$$

$$\Delta K_{I,2} = 142 \text{ MPa} \sqrt{\text{mm}}$$

$$\frac{\Delta a_1}{\Delta N_1} = v_1 = 1.33 \cdot 10^{-5} \left[ \frac{\text{mm}}{\text{cyklus}} \right]$$

$$\frac{\Delta a_2}{\Delta N_2} = v_2 = 3.44 \cdot 10^{-5} \left[ \frac{\text{mm}}{\text{cyklus}} \right]$$

a [mm]	N [-]
30	0
31	88243
32	172931
33	254272
34	332451
35	407634
36	479969
37	549591
38	616620
39	681164
40	743322
41	803181
42	860822
43	916318
44	969733
45	1021130
46	1070562
47	1118080
48	1163731
49	1207560
50	1249606
51	1289908
52	1328504
53	1365428
54	1400715
55	1434399
56	1466512
57	1497088
58	1526159
59	1553759
60	1579921
61	1604680
62	1628071
63	1650130
64	1670892
65	1690395
66	1708692
67	1725732
68	1741555
69	1756202
70	1770399



# Výpočet šíření únavové trhliny

2 výpočetní kroky – dva bloky zatížení

- 1) Blok zatížení 1: výpočet rozkmitu faktoru intenzity napětí na čele trhliny v posuzovaném nosníku.

$$\Delta K_{I,0} = Y(a_0) \cdot \Delta\sigma_0 \cdot \sqrt{\pi \cdot a_0}$$

$$Y = 5.404 \cdot \left(\frac{a_0}{W}\right)^3 - 0.751 \cdot \left(\frac{a_0}{W}\right)^2 - 0.078 \cdot \left(\frac{a_0}{W}\right) + 1.062$$

$$Y = 5.404 \cdot \left(\frac{35}{100}\right)^3 - 0.751 \cdot \left(\frac{35}{100}\right)^2 - 0.078 \cdot \left(\frac{35}{100}\right) + 1.062$$

$$Y = 1.072$$

$$\sigma_{\min} = \frac{M_o}{W_o} = \frac{M_o}{\frac{1}{6}BW^2} = \frac{F_{\min} \cdot 1200}{\frac{1}{6}10 \cdot 150^2} = \frac{50 \cdot 1200}{\frac{1}{6}10 \cdot 150^2} = 1.6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_o}{W_o} = \frac{M_o}{\frac{1}{6}BW^2} = \frac{F_{\max} \cdot 1200}{\frac{1}{6}10 \cdot 150^2} = \frac{450 \cdot 1200}{\frac{1}{6}10 \cdot 150^2} = 14.4 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_0 = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = 12.8 \text{ MPa}$$

$$\Delta K_{I,0} = 1.072 \cdot 12.8 \cdot \sqrt{\pi \cdot 35} = 143.83 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$$





# Výpočet šíření únavové trhliny

2 výpočetní kroky – dva bloky zatížení

2) Blok zatížení 1: výpočet prodloužení únavové trhliny od zatížení prvním blokem.

**Rozkmit faktoru intenzity napětí:**

$$\Delta K_{I,0} = 1.072 \cdot 12.8 \cdot \sqrt{\pi \cdot 35} = 143.83 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$$

**Rychlost šíření únavové trhliny odpovídající délce trhliny 35 mm a rozkmitu faktoru intenzity napětí 143.83 MPa√mm:**

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_0 = 1.391 \cdot 10^{-11} (\Delta K_{I,0})^{2.97} = 1.391 \cdot 10^{-11} (143.83)^{2.97} = 3.568 \cdot 10^{-5} \frac{\text{mm}}{\text{cyklus}}$$

**Přírůstek délky trhliny odpovídající zatížení blokem 1:**

$$\frac{\Delta a_0}{\Delta N_0} = \left(\frac{da}{dN}\right)_0 \Rightarrow \Delta a_0 = \Delta N_0 \cdot \left(\frac{da}{dN}\right)_0 = 100000 \cdot 3.568 \cdot 10^{-5} = 3.57 \text{ mm}$$

**Délky únavové trhliny po aplikaci bloku 1 zatížení:**

$$a_1 = 35 + 3.57 = 38.57 \text{ mm}$$



# Výpočet šíření únavové trhliny

2 výpočetní kroky – dva bloky zatížení

- 3) Blok zatížení 2: výpočet rozkmitu faktoru intenzity napětí na čele trhliny v posuzovaném nosníku.

$$\Delta K_{I,1} = Y(a_1) \cdot \Delta\sigma_1 \cdot \sqrt{\pi \cdot a_1}$$
$$Y = 5.404 \cdot \left(\frac{a_1}{W}\right)^3 - 0.751 \cdot \left(\frac{a_1}{W}\right)^2 - 0.078 \cdot \left(\frac{a_1}{W}\right) + 1.062$$
$$Y = 5.404 \cdot \left(\frac{35 + 3.57}{100}\right)^3 - 0.751 \cdot \left(\frac{35 + 3.57}{100}\right)^2 - 0.078 \cdot \left(\frac{35 + 3.57}{100}\right) + 1.062$$
$$Y = 1.084$$

$$\sigma_{\min} = \frac{M_o}{W_o} = \frac{M_o}{\frac{1}{6}BW^2} = \frac{F_{\min} \cdot 1200}{\frac{1}{6}10 \cdot 150^2} = \frac{0 \cdot 1200}{\frac{1}{6}10 \cdot 150^2} = 0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_o}{W_o} = \frac{M_o}{\frac{1}{6}BW^2} = \frac{F_{\max} \cdot 1200}{\frac{1}{6}10 \cdot 150^2} = \frac{600 \cdot 1200}{\frac{1}{6}10 \cdot 150^2} = 19.2 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_1 = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = 19.2 \text{ MPa}$$

$$\Delta K_{I,1} = 1.084 \cdot 19.2 \cdot \sqrt{\pi \cdot (35 + 3.57)} = 229.1 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$$



# Výpočet šíření únavové trhliny

2 výpočetní kroky – dva bloky zatížení

4) Blok zatížení 2: výpočet prodloužení únavové trhliny od zatížení prvním blokem.

Rozkmit faktoru intenzity napětí:

$$\Delta K_{I,1} = 1.084 \cdot 19.2 \cdot \sqrt{\pi \cdot (35 + 3.57)} = 229.1 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$$

Rychlost šíření únavové trhliny odpovídající délce trhliny 35 mm a rozkmitu faktoru intenzity napětí 143.83 MPa $\sqrt{\text{mm}}$ :

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_1 = 1.391 \cdot 10^{-11} (\Delta K_{I,1})^{2.97} = 1.391 \cdot 10^{-11} (229.1)^{2.97} = 1.429 \cdot 10^{-4} \frac{\text{mm}}{\text{cyklus}}$$

Přírůstek délky trhliny odpovídající zatížení blokem 2:

$$\frac{\Delta a_1}{\Delta N_1} = \left(\frac{da}{dN}\right)_1 \Rightarrow \Delta a_1 = \Delta N_1 \cdot \left(\frac{da}{dN}\right)_1 = 70000 \cdot 1.429 \cdot 10^{-4} = 10 \text{ mm}$$

Délky únavové trhliny po aplikaci bloku 1 a 2 zatížení:

$$a_2 = 35 + 3.57 + 10 = 48.57 \text{ mm}$$



## Závěr

Po aplikaci obou zátěžných bloků bude délka únavové trhliny:

$$a_2 = 35 + 3.57 + 10 = 48.57 \text{ mm}$$