Domácí úlohy[1]

1. Na základě tzv. substitučních vlastností tzv. Kroneckerova symbolu δ_{ij}, ukažte, že platí
$$\delta_{ij} a_{kj} = a_{ki} \tag{1}$$
$$\delta_{ij}\delta_{jk} a_{km} = a_{im} \tag{2}$$

2. Ukažte, že pro druhé derivace součinu souřadnic $x_m x_n$ platí
$$(x_m x_n)_{,ij} = \delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm} \tag{3}$$
$$\nabla^2 (x_m x_n) = 2\delta_{mn} \tag{4}$$

3. Doplňte matici směrových kosinů
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & ? \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & ? \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & ? \end{bmatrix} \tag{5}$$

4. V systému x_i má
   (a) vektor $\mathbf{v}$ složky $\mathbf{v} = (-1, 0, 1)$
   (b) tenzor $\mathbf{T}$ složky reprezentované maticí
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

   Systém x'_i je definován pro transformační matici
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta & 0 \\ -\sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

   pro $\Theta = 45°$. Určete složky vektoru $\mathbf{v}$ a tenzoru $\mathbf{T}$ v systému x'_i.

5. Ukažte, že oba transformační vztahy pro tenzory druhého řádu
$$\begin{aligned} a'_{ij} &= A_{ip} A_{jq} a_{pq} \\ a_{ij} &= A_{pi} A_{qj} a'_{pq} \end{aligned} \tag{8}$$

   vyplývají jeden z druhého.

[1] aktualizace 24. března 2020

6. Je dána matice napětí v bodě $P(x_i)$ materiálu jako

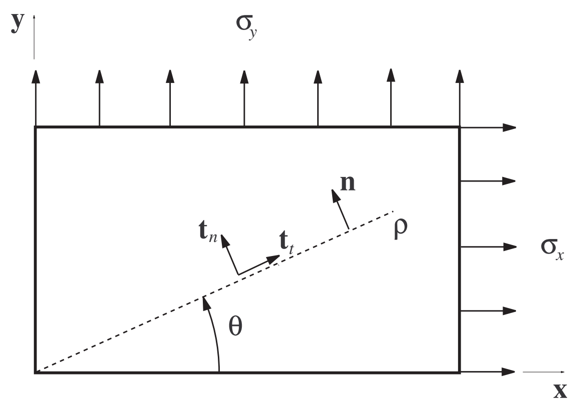
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} zx & z^2 & 0 \\ z^2 & 0 & -y \\ 0 & -y & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Nalezněte vektor napětí v bodě $Q(1, 0, -1)$ na povrchu plochy $y^2 + z^2 = x$.

7. Uvažujme 2D obdélníkovou desku, která je zatížena dvojosou napjatostí

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Nalezněte obecný vztah pro vektor napětí **t** a jeho normálovou σ a smykovou τ složku v obecném řezu ρ, který je definován úhlem θ (viz. obr. 1).



Obrázek 1:

8. Na základě transformačních vlastností tenzoru ukažte, že radiální σ_r, obvodovou σ_θ a smykovou složku $\tau_{r\theta}$ napětí v polárních souřadnicích lze vyjádřit pomocí jeho složek v kartézských souřadnicích

$$\sigma_r = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} cos\, 2\theta + \tau_{xy} sin\, 2\theta \tag{11}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma y}{2} cos\, 2\theta - \tau_{xy} sin\, 2\theta \tag{12}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} sin\, 2\theta + \tau_{xy} cos\, 2\theta \tag{13}$$

9. Ukažte, že pro různou orientaci elementární plošky v bodě P je smykové napětí maximální právě když normála plošky v níž toto maximální smyková napětí působí půlí úhel, který svírají směry největšího a nejmenšího z hlavních napětí v bodě P a že maximální smykové napětí je rovné polovině rozdílu těchto hlavních napětí. *poznámka:* K řešení této úlohy je možné využít analogii s postupem, který byl ukázán na přednášce na úloze stanovení maximálního normálového napětí pomocí vázaného extrému funkce.

10. Rovinná napjatost v rovině x, y je definována vztahem $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$. Užitím problému vlastních čísel ukažte, že pro hlavní napětí v rovině x, y a maximální smykové napětí platí tyto vztahy

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma y}{2})^2 + \tau_{xy}^2} \tag{14}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma y}{2})^2 + \tau_{xy}^2} \tag{15}$$

poznámka: K určení maximálního smykového napětí τ_{max} využijte poznatek, že maximální smykové napětí je rovné polovině rozdílu hlavních napětí σ_1 a σ_2–viz příklad č. 9.

11. Je dána matice napětí v bodě $P(x_i)$ materiálu jako

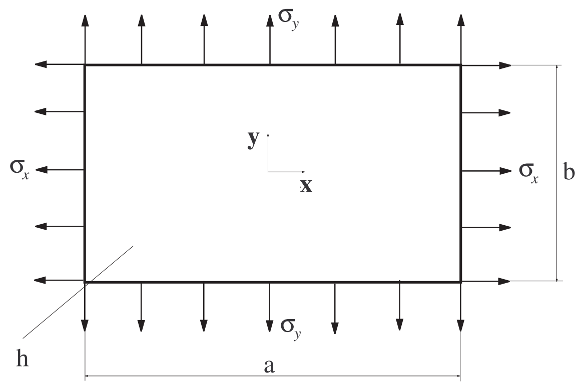
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Určete

(a) matici deviátoru napětí [S]

(b) hlavní hodnoty deviátoru napětí S_1, S_2, S_3

(c) invarianty deviátoru napětí J_1, J_2, J_3



Obrázek 2:

12. Jestliže položíme souřadné osy do hlavních os procházející bodem P materiálu, potom normálové a smykové napětí v oktaedrické rovině nazýváme oktaedrickým normálovým σ_{oct} a oktaedrickým smykovým τ_{oct} napětím v bodě P. Ukažte, že pro ně platí

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_m, \tag{17}$$

kde σ_m je střední napětí

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \tag{18}$$

kde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ jsou hlavní napětí v bodě P.

13. Ověřte, že gradient posunutí Z_{ij} je tenzorem.

14. Uvažujme nosník, který je zatížen napětím σ_x. V příčném směru je vetknut, tj. $\epsilon_y = 0$ a $\sigma_z = 0$. Ukažte, že na základě Hookeova zákona platí

$$\sigma_y = \nu\sigma_x \tag{19}$$

$$\epsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_x, \quad \epsilon_z = -\frac{\nu(1+\nu)}{E}\sigma_x \tag{20}$$

15. Uvažujme obdélníkovou ocelovou destičku, který je zatížena napětím $\sigma_x = 30$ MPa, $\sigma_y = 20$ MPa. Rozměry destičky jsou $a = 300$ mm, $b = 200$ mm a $h = 4$ mm (viz. obr. 2). Youngův modul pružnosti $E = 207$ GPa a Poissonovo číslo $\nu = 0.29$. Určete deformaci destičky ϵ a změnu jejích rozměrů $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.