

Domácí úlohy¹

1. Na základě tzv. substitučních vlastností tzv. Kroneckerova symbolu δ_{ij} , ukažte, že platí

$$\delta_{ij}a_{kj} = a_{ki} \quad (1)$$

$$\delta_{ij}\delta_{jk}a_{km} = a_{im} \quad (2)$$

2. Ukažte, že pro druhé derivace součinu souřadnic x_mx_n platí

$$(x_mx_n)_{,ij} = \delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm} \quad (3)$$

$$\nabla^2(x_mx_n) = 2\delta_{mn} \quad (4)$$

3. Doplňte matici směrových kosinů

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & ? \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & ? \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & ? \end{bmatrix} \quad (5)$$

4. V systému x_i má

(a) vektor \mathbf{v} složky $\mathbf{v} = (-1, 0, 1)$

(b) tenzor \mathbf{T} složky reprezentované maticí

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Systém x'_i je definován pro transformační matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

pro $\Theta = 45^\circ$. Určete složky vektoru \mathbf{v} a tenzoru \mathbf{T} v systému x'_i .

5. Ukažte, že oba transformační vztahy pro tenzory druhého řádu

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= A_{ip}A_{jq}a_{pq} \\ a_{ij} &= A_{pi}A_{qj}a'_{pq} \end{aligned} \quad (8)$$

vyplývají jeden z druhého.

¹aktualizace 22. května 2017

6. Je dána matice napětí v bodě $P(x_i)$ materiálu jako

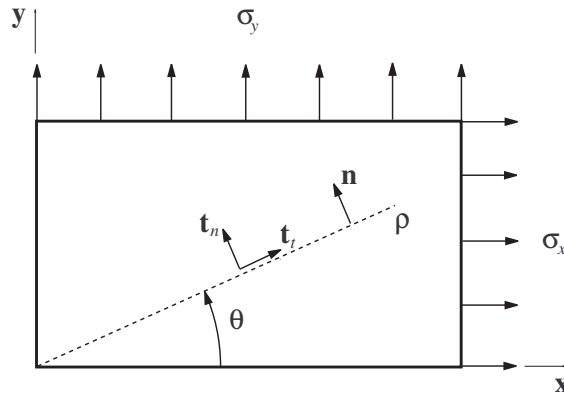
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} zx & z^2 & 0 \\ z^2 & 0 & -y \\ 0 & -y & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Nalezněte vektor napětí v bodě $Q(1, 0, -1)$ na povrchu plochy $y^2 + z^2 = x$.

7. Uvažujme 2D obdélníkovou desku, která je zatížena dvojosou napjatostí

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Nalezněte obecný vztah pro vektor napětí \mathbf{t} a jeho normálovou σ a smykovou τ složku v obecném řezu ρ , který je definován úhlem θ (viz. obr. 1).



Obrázek 1:

8. Na základě transformačních vlastností tenzoru ukažte, že normálovou σ_r a smykovou složku σ_θ napětí v polárních souřadnicích lze vyjádřit pomocí jeho složek v kartézských souřadnicích

$$\sigma_r = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (11)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (12)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (13)$$

9. Rovinná napjatost v rovině x, y je definována vztahem $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$. Užitím problému vlastních čísel ukažte, že pro hlavní napětí v rovině x, y a maximální smykové napětí platí tyto vztahy

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (14)$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (15)$$

poznámka: K určení maximálního smykového napětí τ_{max} využijte poznatek, že maximální smykové napětí τ_{max} je rovné polovině rozdílu hlavních napětí σ_1 a σ_2 .

10. Je dána matice napětí v bodě $P(x_i)$ materiálu jako

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Určete

- (a) matici deviatoru napětí [S]
 - (b) hlavní hodnoty deviatoru napětí S_1, S_2, S_3
 - (c) invarianty deviatoru napětí J_1, J_2, J_3
11. Jestliže položíme souřadné osy do hlavních os procházející bodem P materiálu, potom normálové a smykové napětí v oktaedrické rovině nazýváme oktaedrickým normálovým σ_{oct} a oktaedrickým smykovým τ_{oct} napětím v bodě P . Ukažte, že pro ně platí

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_m, \quad (17)$$

kde σ_m je střední napětí

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \quad (18)$$

kde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ jsou hlavní napětí v bodě P .

12. Ověřte, že gradient posunutí Z_{ij} je tenzorem.