Deformace tělesa, teorie deformace

pojmy:

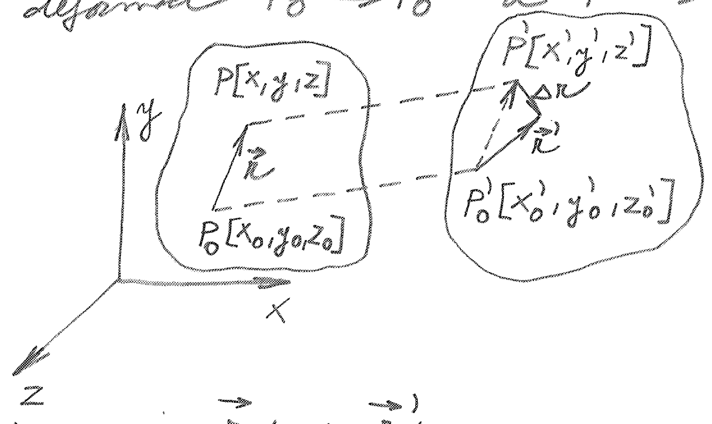
- těleso je deformované, jestliže vzájemná poloha dvou libovolných bodů tělesa se změnila během jeho pohybu
- těleso je absolutně tuhé, jestliže vzdálenost dvou libovolných bodů tělesa se nezměnila během jeho pohybu

pohyb absolutně tuhého tělesa — translace / rotace

pozn: deformace tělesa je čistě geometrické záležitost a nesouvisí s materiálovými vlastnostmi tělesa

Deformace v bodě

- uvážujme dva sousední body P_0, P v nedeformovaném kontinuu, po deformaci $P_0 \rightarrow P_0'$ a $P \rightarrow P'$



$\vec{r} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$

$\vec{r}' = (x' - x_0',\ y' - y_0',\ z' - z_0')$

vazba mezi $\vec{r}$ a $\vec{r}'$

$$\vec{r}' = \vec{r} + \Delta\vec{r} \xrightarrow{\text{složky}} \begin{aligned} r_x' &= r_x + \Delta r_x \\ r_y' &= r_y + \Delta r_y \\ r_z' &= r_z + \Delta r_z \end{aligned}$$

- složky vektoru posunutí $P_0 \rightarrow P_0'$ označíme jako

$u_0 = x_0' - x_0$

$v_0 = y_0' - y_0$

$w_0 = z_0' - z_0$

- složky vektoru posunutí $P \rightarrow P'$ označíme jako

$u = x' - x$

$v = y' - y$

$w = z' - z$

– předpokládejme, že posunutí je jednoznačnou a spojitou funkcí souřadnic x, y, z → potom posunutí bodu P vyjádříme Taylorovým rozvojem v okolí bodu P_0

$$u = u_0 + \frac{\partial u}{\partial x}\underbrace{(x - x_0)}_{r_x} + \frac{\partial u}{\partial y}\underbrace{(y - y_0)}_{r_y} + \frac{\partial u}{\partial z}\underbrace{(z - z_0)}_{r_z}$$

$$v = v_0 + \frac{\partial v}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial v}{\partial z}(z - z_0)$$

$$w = w_0 + \frac{\partial w}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial w}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial w}{\partial z}(z - z_0)$$

upravíme

$$(x' - x) - (x_0' - x_0) = (x' - x_0') - (x - x_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial u}{\partial z}(z - z_0)$$

$$(y' - y) - (y_0' - y_0) = (y' - y_0') - (y - y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial v}{\partial z}(z - z_0)$$

$$(z' - z) - (z_0' - z_0) = (z' - z_0') - (z - z_0) = \frac{\partial w}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial w}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial w}{\partial z}(z - z_0)$$

tenz. zápis $\Delta r_i = u_{i,j}\, r_j$ (*)

$$\left\{\begin{aligned} \Delta r_x &= r_x' - r_x = \frac{\partial u}{\partial x} r_x + \frac{\partial u}{\partial y} r_y + \frac{\partial u}{\partial z} r_z \\ \Delta r_y &= r_y' - r_y = \frac{\partial v}{\partial x} r_x + \frac{\partial v}{\partial y} r_y + \frac{\partial v}{\partial z} r_z \\ \Delta r_z &= r_z' - r_z = \frac{\partial w}{\partial x} r_x + \frac{\partial w}{\partial y} r_y + \frac{\partial w}{\partial z} r_z \end{aligned}\right.$$

veličina

$$Z_{ij} = u_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \operatorname{grad} \vec{u} = \nabla \vec{u}$$

gradient posunutí je tenzorem, neboť zprostředkovává transformaci mezi veličinami $\Delta\vec{r}$ a $\vec{r}$ (obecně není symetrický)

Př (DÚ)

Ověřte, že gradient posunutí Z_{ij} je tenzorem

Otázkou je, jak je v rovnici (*) reprezentován pohyb tělesa jako tuhého celku

– uvažujme pohyb dokonale tuhého tělesa, tedy $|\vec{r}| = |\vec{r}\,'|$

resp. $|\vec{r}|^2 = |\vec{r}\,'|^2 = (r_x + \Delta r_x)^2 + (r_y + \Delta r_y)^2 + (r_z + \Delta r_z)^2 =$

$$= \underbrace{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}_{|\vec{r}|^2} + 2(r_x \Delta r_x + r_y \Delta r_y + r_z \Delta r_z) +$$

$$+ \cancel{\Delta r_x^2} + \cancel{\Delta r_y^2} + \cancel{\Delta r_z^2}$$

zanedbáváme jako členy vyššího řádu

– tedy musí platit

$$r_x \Delta r_x + r_y \Delta r_y + r_z \Delta r_z = 0$$

čili

$$r_i \Delta r_i = 0$$

a dosadíme-li, že $\Delta r_i = u_{i,j} r_j$, dostáváme

$$\underline{u_{i,j} r_i r_j = 0} \qquad (**)$$

rozepsáním (**)

$$\frac{\partial u}{\partial x} r_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) r_x r_y + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) r_x r_z +$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} r_y^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) r_y r_z + \frac{\partial w}{\partial z} r_z^2 = 0$$

(**) musí platit pro libovolné hodnoty $r_x, r_y, r_z \Rightarrow$

transformace (*) představuje pohyb tělesa jako tuhého celku právě když

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}; \quad \dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{\partial w}{\partial x}; \quad \dfrac{\partial v}{\partial z} = -\dfrac{\partial w}{\partial y} \end{array}\right\} \quad u_{i,j} = -u_{j,i}$$

gradient posunutí je antisymetrický